ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

CIĄGI LICZBOWE (lista dodatkowa)

1. Wykazać, że dla liczb naturalnych $k \leqslant n$ prawdziwa jest nierówność

$$1 + \frac{k}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Wskazówka: można zastosować indukcję po k.

2. Wykazać, że ciąg $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest malejący i uzasadnić nierówności:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

oraz

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Wskazówka: oszacować stosunek $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ dla $n \geqslant 2$, korzystając z nierówności Bernoulli'ego.

3. Obliczyć granice niżej podanych ciagów lub stwierdzić ich rozbieżność

$$a_n = n - \ln(1 + 2^n); \qquad b_n = \frac{1 + n[\sqrt{n}]}{n[\sqrt{n}]}; \qquad c_n = n - \sqrt{n}\sin n;$$

$$d_n = n - \ln n!; \qquad e_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad f_n = n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right);$$

$$g_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + n}); \qquad h_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n; \qquad p_n = (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{4}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{2n}),$$

(pokazać, że ${p_n}^2 \leqslant \frac{1}{2n+1}$.)

4. Sprawdzić, czy istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n$.

5. Ciąg a_n spełnia warunek $|\, a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}$. Czy ten ciąg jest zbieżny?

6. Ciąg a_n spełnia warunek $|\, a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Czy ten ciąg musi być zbieżny?

7. Ciąg a_n spełnia warunek : $\exists_{C>0} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leqslant C.$$

Pokazać, że a_n jest ciągiem zbieżnym. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne:

Jeżeli ciąg a_n jest zbieżny, to

$$\exists_{C>0} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leqslant C?$$

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda|x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Tworzymy ciąg x_n kładąc $x_1 = a$ ($a \in \mathbb{R}$), $x_{n+1} = f(x_n)$. Pokazać, że x_n jest ciągiem zbieżnym. Wskazówka: sprawdzić warunek Cauchy'ego.

9. Ciąg a_n spełnia warunki: $a_0 = p, \quad a_1 = q, \quad p, q \in \mathbb{R}$ oraz równanie $\quad a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}\right)$. Wyznaczyć a_n za pomocą funkcji n i zbadać zbieżność tego ciągu. Wskazówka: pokazać, że jeśli ciągi x_n i y_n spełniają równanie, to ciąg $z_n = \alpha x_n + \beta y_n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, również spełnia to równanie, a następnie znaleźć dwa rozwiązania tego rówanania w postaci $a_n = r^n$, gdzie r jest niewiadomą liczbą rzeczywistą.

10. Ciąg a_n spełnia warunki: $a_0 = 2, \quad a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+2} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$. Wyrazić a_n jako funkcję n i zbadać zbieżność tego ciągu.

11. Dany jest ciąg x_n. Wiadomo, że wszystkie podciągi postaci x_{kn} ($k \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$) są zbieżne, gdy $n \to \infty$ (tzn. podciągi $x_2, x_4, x_6, \ldots; x_3, x_6, x_9, \ldots$ są zbieżne). Czy ciąg x_n musi być zbieżny?

12. Permutacją (przestawieniem) ciągu a_n nazywamy ciąg $b_n = a_{\tau(n)}$, gdzie $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych $\mathbb{N}$ (np. $\tau(n) = n - (-1)^n$, przestawiamy $2n - 1$ z $2n$). Czy permutacja ciągu zbieżnego jest ciągiem zbieżnym?

13. Ciąg liczb wymiernych $\frac{p_n}{q_n}$, q_n-naturalne, jest zbieżny do liczby niewymiernej. Pokazać, że $\lim q_n = \infty$. Czy musi być $\lim |p_n| = \infty$?

14. Ciąg liczb wymiernych $\frac{p_n}{q_n}$, q_n-naturalne, jest zbieżny do liczby wymiernej. Czy musi być $\lim q_n = \infty$? Czy jest tak, gdy ciąg $\frac{p_n}{q_n}$ jest różnowartościowy?

15. Niech ξ będzie liczbą niewymierną. Pokazać, że ciąg $x_n = n \cdot \xi - [n \cdot \xi]$ jest różnowartościowy i $x_n \in (0, 1)$. Położyć $\xi = \sqrt{2}$ i znaleźć 10 pierwszych wyrazów x_n.

16. Zbadać rozmieszczenie wyrazów ciągu $x_n = \sin n$, $y_n = \sin n^2$ oraz $z_n = \sin 2^n$ na odcinku $[-1, 1]$, gdzie n, n^2, 2^n są wyrażone w stopniach.

17. Zbadać rozmieszczenie punktów $(\cos n, \sin n)$ oraz $(\cos 2^n, \sin 2^n)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (n wyraża miarę kąta w radianach, a 2^n miarę kąta w stopniach).

18. Dany jest ciąg $a_n \in \mathbb{R}$. Niech $d_n = \inf\{x : x = a_k, k \geqslant n\}$ i $D_n = \sup\{x : x = a_k, k \geqslant n\}$. Czy prawdziwe są zdania:

    (i) Jeżeli a_n jest ciągiem zbieżnym do g, to $\lim d_n = \lim D_n = g$;

    (ii) Jeżeli ciągi d_n i D_n są zbieżne oraz $\lim d_n = \lim D_n = g$, to $\lim a_n = g$;

    (iii) Jeżeli ciąg a_n jest ograniczony, to ciągi d_n i D_n są zbieżne i $\lim d_n \leqslant \lim D_n$?

19. Niech $\liminf a_n = 0$ i $\limsup a_n = \infty$ oraz $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$. Pokazać, że dla każdej liczby $c \in [0, \infty)$ istnieje podciąg a_{k_n} ciągu a_n taki, że $\lim a_{k_n} = c$. Podać przykład ciągu spełniającego trzy powyższe warunki.