ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

GRANICA FUNKCJI

1. Korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie wykazać, że

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4;$ (b) $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0;$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty;$

   (d) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a>0);$ (e) $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0 \quad (x_0>0).$

2. Udowodnić, że:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = g \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = g;$ (b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f^3(x) = g^3.$

3. Udowodnić, że:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = g \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = g;$ (b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = g^2.$

   Czy odwrotne implikacje są prawdziwe?

4. Niech $[a]$ oznacza część całkowitą z liczby a. Zbadać istnienie granic:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right];$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x]}{x}.$

5. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) = 0$. Czy istnieje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

6. Obliczyć granice:

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1};$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1};$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x};$ (d) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

7. Dobrać stałe $a_i, b_i \ (i=1,2)$ tak, aby

   $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0.$$

8. Niech $f(x) = x\cos x \ (x\in\mathbb{R})$. Podać przykłady ciągów (x_n) rozbieżnych do $+\infty$ i spełniających

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty.$

9. Niech $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją okresową, ale nie stałą. Wykazać, że nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

10. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right) = 0.$

11. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0)$.

12. Niech $f(x) = x + [x^2]$. Obliczyć $f(1)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

13. Niech $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$. Dla $n \in \mathbb{Z}$ wyznaczyć $f(n)$, $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$.

14. Niech $f(x) = (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-1}$ $(x \neq 0)$. Obliczyć granice: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

15. Udowodnić, że: (a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, (b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$.

16. Na liczbach rzeczywistych nieujemnych określamy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } x = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } \mathrm{NWD}(m,n) = 1, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gdy x_0 jest liczbą: (a) wymierną, (b) niewymierną.

17. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$; (c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

18. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = a^b$, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a > 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

19. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; (e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

20. Niech f będzie funkcją ograniczoną z dołu na każdym skończonym przedziale (a,b) oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = +\infty$. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

21. Załóżmy, że dla funkcji f zachodzi $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$. Znaleźć $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

22. Wykazać, że funkcja monotoniczna w przedziale $[a,b]$ ma w każdym punkcie wewnętrznym przedziału granicę prawostronną i granicę lewostronną, a w punktach końcowych ma granice jednostronne.

23. Wyznaczyć $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, gdy f jest funkcją rosnącą na przedziale $[a,b]$.

24. Niech funkcja f monotonicznie rośnie na przedziale $[a,b)$, gdzie $a < b$ oraz b jest liczbą skończoną lub $+\infty$. Ponadto niech f będzie funkcją ograniczoną na $[a,b)$. Wykazać, że przy $x \to b$ funkcja ma granicę skończoną.

25. Wyznaczyć $\limsup\limits_{x\to0} f(x)$ oraz $\liminf\limits_{x\to0} f(x)$ dla

(a) $f(x) = \sin^2 \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$; (b) $f(x) = (2 - x^2)\cos\dfrac{1}{x}$.