ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma własność

$$\forall_{\delta>0} \quad \exists_{\varepsilon>0} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

   Czy f jest funkcją ciągłą w x_0?

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma własność

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

   Czy f jest funkcją ciągłą w x_0?

3. Dla podanych funkcji wyznaczyć punkty ciągłości i nieciągłości:

   (a) $y = x^2 - x[x]$; (b) $y = \operatorname{sgn} \sin \pi x$;

   (c) $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$; (d) $y = \begin{cases} \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

4. Dane są funkcje $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ i $g(x) = x(1 - x^2)$. Zbadać ciągłość tych funkcji i ich superpozycji $f(g(x))$ oraz $g(f(x))$.

5. Niech funkcje f i g będą ciągłe na (a, b). Pokazać, że funkcje $u(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ i $v(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ też są ciagłe na (a, b).

6. Niech funkcja f będzie ciągła na półprostej $x \geqslant 0$. Pokazać, ze funkcja $\min\limits_{t\in[0,x]} f(t)$ jest także ciągła na półprostej $x \geqslant 0$.

7. Czy funkcję $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ $(x > -1,\ x \neq 0)$ można tak określić w punkcie $x = 0$, by otrzymać funkcję ciągłą na całej półprostej $x > -1$?

8. Czy funkcję $f(x) = \frac{\sin \pi x}{[x]-x}$ $(x \notin \mathbb{Z})$ można tak określić w punktach całkowitych, by otrzymać funkcję ciągłą na całej prostej $\mathbb{R}$?

9. Funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $\mathbb{R}$ i $f(x) = g(x)$ dla wymiernych x. Czy $f \equiv g$?

10. Uzasadnić, że jedynymi funkcjami ciągłymi na $\mathbb{R}$, spełniającymi dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunek $f(x + y) = f(x) + f(y)$, są funkcje liniowe (por. zadanie z listy o liczbach rzeczywistych).

11. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest ciągła na półprostej $[a, \infty)$ i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, to funkcja ta jest ograniczona na $[a, \infty)$.

12. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na przedziale (a, b) i ma tam własność Darboux, to jest ciągła na (a, b).

13. Funkcję $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, gdy dla dowolnych $x, y \in (a, b)$ i $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$. Uzasadnić, że każda funkcja wypukła jest ciągła.

14. Dana jest funkcja $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0,1) \\ 3-x & \text{dla } x \in [1,2] \end{cases}.$$

Sprawdzić, czy f osiąga swoje kresy na każdym odcinku domkniętym zawartym w $[0,2]$. Czy f ma własność Darboux na każdym takim odcinku?

15. Korzystając z twierdzenia Darboux, sprawdzić, czy poniższe równania mają rozwiązania rzeczywiste:

    (a) $3^x - 2^x = 5$; (b) $x \ln x = 2$; (c) $x^8(1-x^5) = 1$; (d) $x^8(1-x^6) = 1$.

16. Udowodnić, że każde równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, gdzie n jest nieparzyste, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

17. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji w podanych zbiorach:

    (a) $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$; $x \in \mathbb{R}$;
    (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$; $x \in [1,\infty)$;
    (c) $f(x) = \sin x^2$, $x \in [0,2\pi]$; $x \in \mathbb{R}$;
    (d) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

18. Wykazać, że suma funkcji ciągłych jednostajnie na zbiorze D jest funkcją ciągłą jednostajnie na D. Czy twierdzenie takie jest prawdziwe dla iloczynu?

19. Mówimy, że funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spełnia na $[a,b]$ *warunek Lipschitza* ze stałą L, gdy dla dowolnych x, $y \in [a,b]$ zachodzi

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x-y|\,.$$

Pokazać, że funkcja f spełniająca warunek Lipschitza na $\langle a,b\rangle$ jest tam jednostajnie ciągła.

20. Niech f będzie jednostajnie ciągła na odcinku (a,b). Uzasadnić, że funkcję f można przedłużyć jednoznacznie do funkcji ciągłej (jednostajnie) na odcinku domkniętym $[a,b]$, tzn. istnieje ciągła funkcja $\bar{f}\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, taka, że $f(x) = \bar{f}(x)$ dla $x \in (a,b)$.