ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

POCHODNE (cz. 1)

1. Zbadać istnienie pochodnej funkcji $y = f(x)$ w punkcie $x_0 = 0$ dla:

   (a) $y = x \cdot |x|$; (b) $y = \begin{cases} x^2 \cdot \ln x & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$;

   (c) $y = x^{\frac{2}{3}}$; (d) $y = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

2. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Dobrać stałe a i b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant x_0 \\ ax+b & \text{dla } x > x_0 \end{cases}$ miała pochodną w punkcie x_0.

3. Wyznaczyć zbiór tych wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których funkcja
$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$
   ma pochodną w punkcie $x_0 = 0$.

4. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; (b) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$; (c) $f(x) = a^x \quad (a > 0)$;

   (d) $f(x) = \operatorname{ctg} x \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.

5. Niech $a, b > 0$ i niech istnieje $f'(x_0)$. Wykazać, że
$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0 - bh)}{(a+b)h} = f'(x_0).$$
   Podać przykład funkcji f, która w punkcie nieciągłości x_0 posiada granicę
$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

6. Niech $f(x) = |x|^3$. Pokazać, że nie istnieje $f'''(0)$.

7. Funkcja f posiada pochodną w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Podać warunek konieczny i dostateczny na to, by $|f(x)|$ też miała w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ pochodną.

8. Obliczyć pochodne funkcji:

   (a) $f(x) = \left(2^{x^3} + \sin x^2\right)^{-1}$; (b) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot 2^{\operatorname{tg} 5x}$; (c) $f(x) = e^{\arcsin \sqrt{x^2+1}}$;

   (d) $f(x) = \log_3 \Big(\log_5(\log_7 x)\Big)$; (e) $f(x) = \ln^4 \Big(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^4 + 3^x + 1}\Big)$;

   (f) $f(x) = 2^{\frac{x}{\ln x}}$; (g) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$; (h) $f(x) = x^{x^x}$

9. Wykorzystując twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej wyprowadzić wzory na pochodne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych.

10. Czy istnieją różne od stałych funkcje f, g, dla których $[fg]'(x) = f'(x)g'(x)$?

11. Podać przykład funkcji parzystej f, dla której $f'(0) = 0$ pomimo, że w punkcie $x_0 = 0$ funkcja f nie ma ekstremum (nawet niewłaściwego).

12. Udowodnić, że jeśli dwie funkcje różniczkowalne f i g spełniają dla wszystkich x nierówność $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, to pomiędzy każdymi dwoma pierwiastkami równania $f(x) = 0$ znajduje się pierwiastek równania $g(x) = 0$.

13. Dowieść, że jeśli pochodna $f'(x)$ jest różnowartościowa, to dla każdego x_0 krzywa $y = f(x)$ leży po jednej stronie stycznej w tym punkcie. Wywnioskować stąd, że $e^x > 1 + x$ dla $x \neq 0$.

14. Dowieść, że dla $x > -1$ zachodzi $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$.
    Wykorzystując ten fakt wykazać istnienie granicy (zwanej stałą Eulera; $\approx 0,5772$):
$$\lim_{n\mapsto\infty} \Big[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\Big].$$

15. Uzasadnić tożsamości:
    (a) $\operatorname{arc\,ctg} x = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$
    (b) $\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,tg}(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

16. Pokazać, że jeśli $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, to wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ posiada pierwiastek rzeczywisty $x_0 \in (0, 1)$.

17. Udowodnić, że równanie $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni.

18. Niech f będzie różniczkowalna na $(0, +\infty)$ i niech $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0$.

19. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą na $\mathbb{R}$, różniczkowalną w każdym punkcie $x \neq 0$ i taką, że $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 3$. Czy wynika stąd, że istnieje $f'(0)$?

20. Niech f będzie funkcją ciągła na $[0, +\infty)$, różniczkowalną na $(0, +\infty)$ oraz taką, że $f(0) = 0$ i f' jest rosnąca. Pokazać, że funkcja $\frac{f(x)}{x}$ jest rosnąca na $(0, +\infty)$.

21. Pokazać, że funkcja $f\colon (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ o pochodnej ograniczonej na (a, b) jest jednostajnie ciągła.

22. Zbadać przebieg zmienności funkcji:
    (a) $f(x) = x^2 e^{-x}$; (b) $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$; (c) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

23. Udowodnić, że:
    (a) wśród prostokątów o stałym obwodzie największe pole ma kwadrat;
    (b) wśród trójkątów o stałym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny.