ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

POCHODNE (cz. 2)

1. Niech $p \geqslant 1$, ustalone. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^p + (1-x)^p$ na odcinku $[0,1]$.

2. Do rzeki o szerokości a dochodzi pod kątem prostym kanał o szerokości $b < a$. Znaleźć długość największej kłody drewna, którą można spławić tym kanałem do rzeki. W obliczeniach zaniedbać grubość kłody.

3. Funkcja f jest parzysta i różniczkowalna na przedziale $(-a,a)$. Pokazać, że f' jest funkcją nieparzystą na tym przedziale.

4. Funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz $f(a) = f(b)$. Wykazać, że istnieję takie dwa punkty $x, y \in (a,b)$, $x \neq y$, że $f'(x) + f'(y) = 0$.

5. Dla podanych funkcji znaleźć $f'(x)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, $f''(x)$ dla wszystkich x, dla których wymienione obiekty sę dobrze określone.

   (a) $f(x) = [x]\sin(\pi x)$; (b) $f(x) = \sin(\pi(x-[x]))$.

6. Niech $y = f(x)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Wyznaczyć $(f^{-1})''(y)$ zakładając, że pochodna ta istnieje.

7. Znaleźć $f^{(n)}(x)$, jeśli

   (a) $f(x) = \sin(ax)$; (b) $f(x) = \sin^2(x)$; (c) $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$.

8. Definiujemy

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

   (a) Wyliczyć jawnie kilka pierwszych funkcji P_n.
   (b) Pokazać, że P_n jest wielomianem stopnia n.
   (c) Udowodnić, że P_n ma n różnych pierwiastków w przedziale $(-1,1)$.
   (d) Sprawdzić, że P_n spełnia następujące równanie różniczkowe Legendre'a:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \qquad y = y(x).$$

   Uwaga: funkcje P_n są nazywane wielomianami Legendre'a.

9. Załóżmy, że funkcje f i g są n-krotnie różniczkowalne na przedziale (a,b). Udowodnić następujący wzór Leibniza dla pochodnej iloczynu tych funkcji:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \qquad x \in (a,b).$$

10. Sprawdzić, że dla funkcji $f(x) = \arcsin x$ prawdziwy jest wzór

$$(1-x^2)f''(x) = xf'(x), \qquad x \in (-1,1).$$

    Stosując do obu stron tej relacji wzór Leibniza obliczyć $f^{(n)}(0)$ dla $n \geqslant 2$.

11. Dana jest funkcja $f(x) = e^{-1/x^2}$ dla $x > 0$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$. Pokazać, że f ma pochodne wszystkich rzędów na $\mathbb{R}$ i $f^{(n)}(0) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

12. Wyznaczyć wzór Taylora dla funkcji $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$ w punkcie bazowym $x_0 = 1$ z pierwszą, drugą i trzecią resztą (w dowolnej postaci).

13. Wyznaczyć wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$ w punkcie bazowym $x_0 = 2$ z n-tą resztą. Następnie ocenić błąd jaki popełniamy przyjmując, że
$$\ln \frac{x}{x-1} \approx \ln 2 - \frac{x-2}{2} + \frac{3(x-2)^2}{8} \quad \text{dla} \quad |x-2| \leqslant 1/5.$$

14. Obliczyć $\sqrt[3]{0,95}$ z dokładnością do 10^{-3}.

15. Korzystając ze wzoru Taylora obliczyć

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$.

16. Wykazać, że:

    (a) $\operatorname{tg}(x) - x = O(x - \sin x)$ przy $x \to 0$; (b) $e^x - e^{\sin x} = O(x^3)$ przy $x \to 0$;

    (c) $x^{-1} = o(\sqrt[x]{x} - 1)$ przy $x \to \infty$; (d) $\ln(1-x) = o(1/\ln x)$ przy $x \to 1^-$.

17. Obliczyć podane granice.

    (a) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}^2(x) - 1/x^2)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$;

    (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/(1+\ln x)}$; (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x\right)^x$.

18. Sprawdzić, czy można zastosować twierdzenie de L'Hospitala do obliczenia granic
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 \cos(1/x)}{\sin^2(x)}.$$

Zadania nadobowiązkowe (niektóre o podwyższonym poziomie trudności):

1. Funkcja $f\colon [0,1] \to [0,1]$ jest ciągła na $[0,1]$, różniczkowalna na $(0,1)$, oraz $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Udowodnić, że istnieją takie liczby $x, y \in (0,1)$, $x \neq y$, że $f'(x)f'(y) = 1$.

2. Niech $y = f(x)$ będzie różniczkowalna czterokrotnie. Wyznaczyć pochodne do czwartego rzędu funkcji odwrotnej zakładając, że pochodne te istnieją.

3. Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \geqslant 0$ zachodzą nierówności
$$0 \leqslant e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x \left(1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-x/2}\right).$$

4. Udowodnić, że jeżeli $a, b > 0$, to wtedy $a^b + b^a > 1$.

5. Udowodnić, że każdy wielomian jest różnicą dwóch wielomianów rosnących.

6. Niech f będzie dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $(0,\infty)$ i załóżmy, że f'' jest ograniczona na $(0,\infty)$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Pokazać, że $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.