ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

CAŁKI NIEOZNACZONE

1. Obliczyć całki nieoznaczone

a) $\int \frac{1+6^x}{4^x}dx$, $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, $\int \sqrt{2(1+\cos 2x)}dx$, $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$,
$\int e^{\sqrt{x}}dx$, $\int x^3e^{-x}dx$, $\int x\sin\sqrt{x}dx$, $\int \frac{xdx}{(\cos x)^2}$, $\int(\arcsin x)^2dx$;

b) $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$, $\int \frac{5-4x}{x^2-4x+20}dx$, $\int \frac{x}{4+x^4}dx$, $\int \frac{dx}{x^2+x^4}$,
$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$, $\int \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$;

c) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sin x+\cos x}$, $\int \cos 3x\sin 5xdx$, $\int \frac{dx}{\sin 2x\cos x}$, $\int \sin x\sin(x+\frac{\pi}{3})dx$,
$\int \frac{dx}{a^2(\sin x)^2+(\cos x)^2}$;

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$, $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-x^2}}$,
$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$, $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$, $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$;

e) $\int x|x|dx$, $\int e^{-|x|}dx$, $\int \max\{1,x^2\}dx$, $\int \min\{0,\sin x\}dx$,
$\int f(x)dx$, gdzie $f(x)=1-x^2$ dla $|x|\leqslant 1$ i $f(x)=|x|-1$ dla $|x|>1$.

2. Funkcja $F(x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ i na przedziałach niezawierających punktów postaci $n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ jest funkcją pierwotną funkcji $\mathrm{sgn}(\sin \mathrm{x})$. Narysować wykres tej funkcji wiedząc, że $F(0)=0$.

3. Funkcja $F(x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ i na przedziałach $(-\infty,0)$ oraz $(0,\infty)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)=\frac{1}{1+|x|}$. Znaleźć $F(x)$ i narysować jej wykres, jeśli $F(0)=1$.

4. Wiadomo, że $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$. Czy można znaleźć $f(x)$?

5. Znaleźć wzory rekurencyjne dla całek

$$I_n=\int\frac{dx}{(\cos x)^n},\qquad J_n=\int(\ln x)^ndx,\qquad R_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx,\qquad S_n=\int x^ne^{-x}dx.$$

6. Niech funkcja $f(x)$ będzie monotoniczną funkcją ciaglą a $f^{-1}(x)$ jej funkcją odwrotną. Dowieść, że jeżeli $\int f(x)dx=F(x)+C$, to

$$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$