ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

CAŁKA OZNACZONA

1. Oblicz całki: (a) $\int_0^2 |1-x|\,dx$, (b) $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx$, (c) $\int_0^\pi e^{\cos x}\sin x\,dx$.

2. Korzystając ze wzoru Newtona–Leibniza wykaż, że

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2;$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e};$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$

3. Uzasadnij, że dla m, $n \geqslant 0$

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx.$$

4. Wyprowadź wzór na $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ dla $n\in N$ (wskazówka: postać wzoru zależy od parzystości n). Następnie udowodnij wzór Wallisa:

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2.$$

5. Udowodnij nierówność Schwarza

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$$

   dla dowolnych f, $g\in\mathcal{R}[a,b]$. Kiedy w powyższej nierówności zachodzi równość?

6. Korzystając m.in. z nierówności Schwarza udowodnij nierówność

$$1\leqslant\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\leqslant\sqrt{1{,}2}.$$

7. Funkcja $f\colon[0,b]\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w sposób ciągły i znika w pewnym prawostronnym otoczeniu zera oraz w pewnym lewostronnym otoczeniu punktu b. Udowodnij następującą nierówność (Hardy'ego)

$$\int_0^b\frac{f^2(x)}{x^2}\,dx\leqslant 4\int_0^b(f'(x))^2\,dx.$$

   Wskazówka: skorzystaj z nierówności Schwarza i ze wzoru na całkowanie przez części.

8. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest wypukła i ciągła. Udowodnij, że

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

9. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na przedziale $[-a, a]$, gdzie $a > 0$. Udowodnij, że (i) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, gdy f jest funkcją nieparzystą; (ii) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, gdy f jest funkcją parzystą. Korzystając m.in. z powyższych własności oblicz całki

$$\text{(a)} \int_{-1/2}^{1/2} \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx; \qquad \text{(b)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, e^{\sin|x|}\,dx.$$

10. Niech $f(x) = \int_{x}^{x+1} \sin(t^2)\,dt$. Uzasadnij, że $f(x) \leqslant \frac{2}{x}$ dla $x \geqslant 0$. Wskazówka: podstaw $u = t^2$, a następnie skorzystaj z II twierdzenia o wartości średniej dla całek.

11. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na półprostej $[0, \infty)$ i taką, że istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. Oblicz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)\,dt.$$

12. Oblicz pola figur ograniczonych krzywymi: (a) $y = x^2$ i $x = y^2$; (b) $x^2 + y^2 = 8$ i $2y = x^2$.

13. Oblicz pole (a) figury ograniczonej pętlą linii $y^2 = x(x-1)^2$; (b) wycinka elipsy $(x/2)^2 + y^2 = 1$ ograniczonego prostymi $y = 0$ i $2y = x$.

14. Wyprowadź wzór na moment bezwładności jednorodnego stożka względem jego osi symetrii. Wymiary i masa stożka są dane.

15. Udowodnij pierwsze twierdzenie Guldina: Pole powierzchni utworzonej przez obrót łuku $y = f(x)$ wokół osi OX jest iloczynem długości tego łuku przez długość drogi zakreślonej przy tym obrocie przez środek ciężkości tego łuku.

16. Udowodnij drugie twierdzenie Guldina: Objętość bryły utworzonej przez obrót trapezu krzywoliniowego wyznaczonego krzywą $y = f(x)$ na odcinku $[a, b]$ wokół osi OX jest iloczynem pola tego trapezu przez długość drogi zakreślonej przy tym obrocie przez środek ciężkości tego trapezu.

17. Wyprowadź wzór Ciołkowskiego

$$v = w \ln\frac{m_0}{m},$$

w którym v jest prędkością końcową rakiety, w – prędkością gazów odrzutowych, m_0 – masą początkową, a m – masą końcową rakiety. Zakładamy, że rakieta ma zerową prędkość początkową i że nie działają na nią żadne zewnętrzne siły. Ilość paliwa spalanego w jednostce czasu nie musi być stała! Wskazówka: skorzystaj z zasady zachowania pędu.

18. Wiedząc, że funkcje ciągłe są całkowalne, oblicz (z definicji) całki

$$\text{(a)} \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx; \qquad \text{(b)} \int_{0}^{1} 2^x dx.$$

19. Wykorzystując własności całek oznaczonych Riemanna pokaż, że

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0; \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{(\sin x)^n}{a+\sin \pi x}\,dx = 0,\ a \in (1, \infty).$$