ANALIZA MATEMATYCZNA E1, WPPT

CAŁKA RIEMANNA

1. Sprawdź, czy poniższe funkcje są całkowalne i oblicz ich całki dolną i górną:

   (a) $f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x \in [a,b],\ a > 0$;

   (c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{dla } x = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } 0 < m \leqslant n \text{ są względnie pierwsze}, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

2. Podaj przykład funkcji niecałkowalnej na przedziale $[0,1]$ i takiej, żeby wartość bezwzględna tej funkcji była na tym przedziale całkowalna.

3. Uzasadnij, że dla dowolnych funkcji ograniczonych na przedziale domkniętym $[a,b]$ zachodzi nierówność
$$(*) \quad \overline{\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx} \leqslant \overline{\int_a^b f(x)\, dx} + \overline{\int_a^b g(x)\, dx};$$
   a jeśli jedna z funkcji jest całkowalna, to w $(*)$ zachodzi równość. Podaj przykład funkcji, dla których zachodzi nierówność ostra.

4. Niech $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ($\mathcal{R}[a,b]$ oznacza rodzinę funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$). Określamy funkcje f^+, f^- na $[a,b]$ przyjmując
$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } f(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{gdy } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{gdy } f(x) < 0. \end{cases}$$
   Wykaż, że $f^+, f^- \in \mathcal{R}[a,b]$. Jaki jest związek pomiędzy całkami z funkcji f^+, f^- i f?

5. Załóżmy, że $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in [a,b]$ oraz $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Uzasadnij, że jeśli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a,b]$, to $f(x_0) = 0$.

6. Załóżmy, że $f \in \mathcal{R}[a,b]$ nie jest równa tożsamościowo zeru oraz $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Uzasadnij, że istnieją $x,\ y \in [a,b]$ takie, że $f(x)f(y) < 0$.

7. Sprawdź, że następujące zbiory są miary Lebesgue'a zero:

   (a) zbiór jednopunktowy i ogólniej zbiór skończony;

   (b) suma dwóch i ogólniej przeliczalnej rodziny zbiorów miary Lebesgue'a zero;

   (c) zbiór liczb wymiernych.

8. Zbiór Cantora C definiujemy następująco
$$C = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n - 1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right) \right).$$
   Udowodnij, że C jest nieprzeliczalny i miary Lebesgue'a zero.

9. Oblicz całki: (a) $\int_0^{\pi/2} x^2\, d(\cos x)$, (b) $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, d(e^x)$.

10. Funkcje $f,\ g : [0,1] \to [0,1]$ są rosnące oraz $f(g(x)) = x$ dla każdego $x \in [0,1]$. Udowodnij, że $\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 y\, df(y)$.