ANALIZA MATEMATYCZNA D2, WPPT

SZEREGI LICZBOWE

1. Podać przykład szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
   (a) rozbieżnego i takiego, że szereg $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots$ jest zbieżny.
   (b) rozbieżnego, naprzemiennego, o składniku ogólnym dążącym do zera.
   (c) zbieżnego, o wyrazach dodatnich i takiego, że nie istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
2. Obliczyć $\sum_{n=2}^{\infty}$ dla: (1) $a_n = \frac{4n}{(n^2-1)^2}$, (2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (3) $a_n = (-1)^n \ln(\frac{n}{n+2})$.
3. Zbadać zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dla:

   (1) $a_n = \frac{n^{n^2} 2^n}{(n+1)^{n^2}}$, (2) $a_n = \frac{\ln n}{3^n}$, (3) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, (4) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

   (5) $a_n = \frac{n!}{n^n}(\frac{2n+1}{n+5})^n$, (6) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, (7) $a_n = \frac{n^{2004}+1}{e^n}$,

   (8) $a_n = \frac{1}{n}\ln(1 + \frac{1}{n})$, (9) $a_n = \sin\frac{1}{n}$, (10) $a_n = (\frac{3}{\ln n})^n$, (11) $a_n = e^{2n}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$,

   (12) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, (13) $a_n = \ln\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}$, (14) $a_n = (\frac{n}{n+1})^{n(n+1)}$,

   (15) $a_n = \frac{\lambda^n n!}{n^n}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, (16) $a_n = n^{\ln\lambda}$ $(\lambda > 0)$.
4. Wykazać, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to:
   (i) $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, o ile $0 < a_{n+1} < a_n$ dla każdego n,
   (ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) = 0$.
5. Udowodnić, że zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pociąga zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$, o ile $a_n \geqslant 0$.
6. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem zadanym wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = a_n - na_n^2$, $a_1 \in (0, 1)$. Wykazać zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
7. Udowodnić następujące kryterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny $\iff$ istnieje ciąg liczb naturalnych $p_0 < p_1 < p_2 < \ldots$ taki, że dla $b_n = a_{p_{n-1}+1} + a_{p_{n-1}+2} + \cdots + a_{p_n}$ zbieżny jest $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
8. Udowodnić kryterium Kummera zbieżności szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny $\iff$ istnieje ciąg liczb dodatnich $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że:
$$\lim_{n\to\infty}(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}) > 0.$$
9. Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnić kryterium Raabego: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich i taki, że $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$ jest zbieżny. Pokazać, że szereg może być zbieżny mimo że nie spełnia kryterium Raabego.
10. Wykorzystując kryterium Raabego rozstrzygnąć, kiedy szereg hipergeometryczny
$$1 + \frac{ab}{c \cdot 1} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1\cdot 2} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$
   gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, jest zbieżny.

11. Korzystając z kryterium o zagęszczaniu zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln[\ln(n)]}$.

12. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami rozbieżnymi o wyrazach nieujemnych. Co można powiedzieć o zbieżności szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

13. Niech $a_n > 0$ i niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie rozbieżny. Przyjmijmy $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

    (a) Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ jest rozbieżny.

    (b) Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ jest rozbieżny. Wskazówka: udowodnić, że:

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geqslant 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}.$$

    (c) Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ jest zbieżny. Wskazówka: udowodnić, że:

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

    (d) Zbadać zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

    Co można powiedzieć o zbieżności szeregów z punktów (a)-(d), gdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$?

14. Zbadać zbieżność (warunkową i bezwzględną) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln^{\alpha}(1 + \frac{1}{n})$, jeżeli: (i) $0 < \alpha \leqslant 1$, (ii) $1 < \alpha$.

15. Niech $0 < \lambda < 1$, $x \in \mathbb{R}$. Wykazać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \lambda^n.$$

    Wywnioskować, że $\lim_{n\to\infty} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \lambda^n = 0$ dla $|\lambda| < 1$.

16. Udowodnić, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie $\iff$ dla dowolnego ciągu $\{\epsilon_n\}$, $\epsilon_n = \pm 1$, zbieżny jest $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$.

17. Niech $M \subset \mathbb{N}$ oznacza zbiór tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra zero. Pokaż, że $\sum_{n\in M} \frac{1}{n}$ jest zbieżny.

18. Niech $0 < \theta < \pi$. Pokazać, że $|\sum_{n=1}^{N} \sin n\theta| < \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\theta}$ niezależnie od N i wywnioskować, że jeśli ciąg a_n dąży malejąco do zera, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta$ jest zbieżny dla wszystkich θ rzeczywistych, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$ jest zbieżny, jeżeli θ nie jest parzystą wielokrotnością π.

19. Wykazać, że jeśli $\{b_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to także $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.