ANALIZA MATEMATYCZNA D2, WPPT

SZEREGI LICZBOWE II, ILOCZYNY NIESKOŃCZONE

1. Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ jest zbieżny i jego suma wynosi $\ln 2$. Wskazówka: Niech
$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \quad \epsilon_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n.$$
Zauważyć, że $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n = \ln 2n + \epsilon_{2n} - \ln n - \epsilon_n$.

2. Wyznaczyć sumę szeregu
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots.$$
W powyższym szeregu zamienić kolejność sumowania tak, aby otrzymać szereg rozbieżny.

3. Udowodnić, że jeżeli $(\forall m, n)(a_{nm} \geqslant 0)$, to $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$.

4. Pokazać, że bez założenia $a_{nm} \geqslant 0$ twierdzenie z zadania 3. nie jest ogólnie prawdziwe. Wskazówka:
$$a_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < m, \\ -1 & \text{dla } n = m, \\ 2^{m-n} & \text{dla } n > m. \end{cases}$$

5. (a) Zbadać zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ gdy:

   (1) $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, (2) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, (3) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$,

   (4) $a_n = -1$, (5) $a_n = \frac{n}{t}\sin\frac{t}{n}$, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (b) Obliczyć iloczyny $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ dla: (1) $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, (2) $a_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$.

6. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ jest zbieżny.

   (b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1 + |a_n|)$ jest zbieżny.

   (c) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

   Mówimy wtedy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie. Pokazać, że wartość iloczynu nieskończonego zbieżnego bezwzględnie nie zależy od kolejności czynników.

7. Niech $p_1 < p_2 < \ldots$ będzie ciągiem złożonym ze wszystkich liczb pierwszych. Oznaczamy $\pi(x) = \#\{n : p_n \leqslant x\}$.

   (a) Udowodnić, że dla dowolnych naturalnych $x \geqslant 2$ mamy
   $$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x} \leqslant \prod_{n=1}^{\pi(x)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^k}\right) \leqslant \pi(x) + 1.$$
   (Można stąd wydedukować, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele).

   (b) Uzasadnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ jest rozbieżny.