Wrocław, 19 kwietnia 2004.

ANALIZA MATEMATYCZNA, WPPT (MATEMATYKA)

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

1. Wykazać, że każdy jednostajnie zbieżny ciąg funkcji ograniczonych jest jednostajnie ograniczony.

2. Zbadać jednostajną zbieżność następujących ciągów funkcyjnych:

   (1) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad g_n(x) = x^n(1 - x^n), \quad 0 \le x \le 1;$

   (2) $f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad 0 < x \le 1;$

   (3) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad 0 \le x \le 1$ oraz $1 < x < \infty$.

3. Określić dziedzinę zbieżności następujących szeregów funkcyjnych:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^ny^n}{x^n+y^n}$, $x, y > 0$.

4. Zbadać jednostajną zbieżność szeregów funkcyjnych:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \quad -\infty < x < \infty$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \epsilon \le x \le 2\pi - \epsilon, \ \epsilon > 0$,

   (3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \quad 0 \le x < \infty$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x} \quad 0 < x < \infty$.

5. Wyznaczyć promień zbieżności i zbadać zachowanie się na końcach przedziałów zbieżności następujących szeregów potęgowych:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$.

   (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$, (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$, (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$,

6. Wykorzystując znane rozkłady klasycznych funkcji w szeregi potęgowe znaleźć szeregi Maclaurina następujących funkcji:

$$\exp(-x^2), \qquad \sin^2 x, \qquad \frac{1}{1-x-x^2}, \qquad (1+x)\exp(-x), \qquad \frac{x^2}{(1-x^2)^2}.$$

7. Udowodnić równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}, \quad \big(\,|x| < 1\,\big); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \big(\,|x| < 1\,\big).$$

8. Obliczyć pochodną $f^{(99)}(0)$, gdy: $f(x) = x^6 e^{-2x}$, $f(x) = \frac{x^7}{1+x^2}$, $f(x) = x\ln(1+x^2)$.

9. Czy funkcja f ma ciągłą pochodną w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, jeśli:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{n^2}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x\sqrt{n}}{n^2}?$$

10. Wykazać, że suma dwóch ciągów jednostajnie zbieżnych funkcji ciągłych jest jednostajnie zbieżna. Udowodnić to samo dla iloczynu przy założeniu, że $a \leq x \leq b$. Pokazać, że dla przedziałów otwartych twierdzenie nie zachodzi, rozpatrując np.

$$f_n(x) = x(1 - \frac{1}{n}), \quad g_n(x) = \frac{1}{x^2}.$$

11. Udowodnić kryterium Abela jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze E jeśli:
   (a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na E,
   (b) ciąg funkcyjny $\{b_n(x)\}$ jest wspólnie ograniczony na E oraz
   (c) dla każdego $x \in E$ ciąg liczbowy $\{b_n(x)\}$ jest monotoniczny.

12. Udowodnić kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze E jeśli:
   (a) sumy częściowe $\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ są wspólnie ograniczone,
   (b) ciąg funkcyjny $\{b_n(x)\}$ zbiega jednostajnie na E do funkcji tożsamościowo równej zero oraz
   (c) dla każdego $x \in E$ ciąg liczbowy $\{b_n(x)\}$ jest monotoniczny.

13. Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ jest zbieżny jednostajnie dla $x > 0$.

14. Pokazać, że jeśli funkcja f jest ciągła na $[0,1]$ i $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ to $f(x) = 0$ na $[0,1]$. Wskazówka: Zauważyć, że całka z iloczynu funkcji f i dowolnego wielomianu wynosi zero. Skorzystać z twierdzenia Weierstrassa: rozpatrzyć ciąg wielomianów $P_n(x) \rightrightarrows f$, wejść z granicą pod znak całki, skąd $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$.

15. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$. Dla jakich wartości x szereg ten jest zbieżny bezwzględnie? Na jakich przedziałach szereg ten jest zbieżny jednostajnie? Na jakich przedziałach szereg ten nie jest zbieżny jednostajnie? Czy funkcja f jest ciągła w punktach, w których szereg jest zbieżny? Czy f jest ograniczona?

16. Udowodnić, że szereg $s(x) = x(1-x) - x(1-x) + \ldots + x^n(1-x) - x^n(1-x) + \ldots$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $0 \leq x \leq 1$. Następnie przestawić jego wyrazy tak, aby otrzymać szereg zbieżny niejednostajnie w tym przedziale.

17. Niech

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{dla} \quad \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla} \quad \frac{1}{n} < x. \end{cases}$$

   Pokazać, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji ciągłej, ale zbieżność nie jest jednostajna. Pokazać, rozpatrując $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, że zbieżność bezwzględna (nawet gdy zachodzi dla wszystkich x) nie pociąga za sobą zbieżności jednostajnej.

18. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale ograniczonym, ale nie jest bezwzględnie zbieżny dla żadnego x.

19. Niech $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f i że równość

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

zachodzi dla $x \neq 0$, ale nie dla $x = 0$.

20. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych, zbieżnym jednostajnie na zbiorze E do funkcji f. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$, dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \subset E$, zbieżnego do $x \in E$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

21. (★) Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (niekoniecznie zbieżny) nazywamy sumowalnym w sensie Abela gdy

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = A$$

istnieje. Liczbę A nazywamy sumą w sensie Abela szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Podać przykład szeregu liczbowego o wyrazach ograniczonych, który nie jest sumowalny (zbieżny), ale jest sumowalny w sensie Abela. Pokazać, że każdy szereg sumowalny jest też sumowalny w sensie Abela i że obie sumy pokrywają się.