ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Całki niewłaściwe, całki z parametrem

1. Oblicz całki niewłaściwe ($a > 0$, $b \in \mathbb{R}$)

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-|x|}}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - x + 3}$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\, dx$; (d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x\, dx}{(\sin x)^a}$;

   (e) $\displaystyle\int_{-1/2}^{3} \frac{x\, dx}{\sqrt{3+5x-2x^2}}$; (f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx$; (g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Zbadaj zbieżność całek

   (a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sin 2x\, dx}{xe^{-x} + x^2 - 1}$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^x}{e^x - e}\, dx$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} (x^{-3/2} + x^4) e^{-x} \sin 5x\, dx$.

3. Udowodnij kryterium ilorazowe: Załóżmy, że (1) $f, g \in \mathcal{R}[a, T]$ dla dowolnego $T > a$ oraz $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$ dla wszystkich $x \geqslant a$ i (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$, gdzie $0 < \mu < \infty$. Wówczas całka $\int_a^\infty f(x)\, dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_a^\infty g(x)\, dx$ jest zbieżna.

4. Sformułuj i udowodnij kryterium ilorazowe dla całek niewłaściwych drugiego rodzaju.

5. Sprawdź zbieżność całek

   (a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{(x + \sqrt{x+1})\, dx}{x^2 + 2\sqrt[5]{x^4+1}}$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x} - 1}\, dx$;

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x\, dx}{x^a}$; (e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x - \cos x}$; (f) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \sin\frac{1}{x}\, dx$.

6. Zbadaj zbieżność (bezwzględną, warunkową) całek w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$

   (a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\cos x}{x^a}\, dx$; (c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} \cos x\, dx$;

   (d) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{[x]+1}}{\sqrt{x}}\, dx$; (e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin(x^2)\, dx$; (f) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

   (g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{x^a} - 1}$; (h) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^a\, x$; (i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\, dx$;

7. Narysuj wykres funkcji $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ spełniającej warunki: (1) f jest ciągła; (2) całka $\int_0^\infty f(x)\, dx$ jest zbieżna; (3) $\displaystyle\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

8. Załóżmy, że funkcja f jest (słabo) malejąca na przedziale $[0,\infty)$ i całka $\int_0^\infty f(x)\, dx$ jest zbieżna. Udowodnij, że wówczas $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$. Porównaj z analogicznym zadaniem dla szeregów.

9. Stosując kryterium całkowe zbadaj zbieżność szeregów w zależności od wartości parametrów a, $b \in \mathbb{R}$

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \, \ln^a(\ln n)}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{an}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln^b n}$.

10. Określ dziedzinę funkcji $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Czy jest ona ciągła, różniczkowalna w swojej dziedzinie?

11. Funkcję B (beta) definiujemy wzorem

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

   dla a, $b > 0$. Uzasadnij, że

   (a) powyższa definicja jest poprawna, tj. całka jest zbieżna;
   (b) $B(a,b) = B(b,a)$;
   (c) $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$ dla $b > 1$;
   (d) B jest funkcją różniczkowalną;
   (e) zachodzi wzór

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

12. Funkcje Bessela pierwszego rodzaju rzędu n ($n = 0, 1, \dots$) definiujemy wzorem

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,dt.$$

   Uzasadnij, że funkcje te są dwukrotnie różniczkowalne i spełniają równania:

   (a) $J_n'(x) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x))$;
   (b) $x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$.

13. Niech f będzie nieujemną funkcją ciągłą na zbiorze $[a,\infty) \times [c,d]$. Udowodnij, że jeśli funkcja $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ jest (dobrze określona i) ciągła na $[c,d]$, to całka $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ jest zbieżna jednostajnie względem parametru $y \in [c,d]$.

14. Udowodnij, że dla $a \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln(1+a).$$

   Wskazówka: zróżniczkuj powyższą równość po parametrze a.

15. Udowodnij, że

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\cos x\,dx = \ln\sqrt{2}.$$

   Wskazówka: zróżniczkuj po a całkę $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x}\cos x\,dx$.