ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Szeregi Fouriera

Dla funkcji f całkowalnej na $[-\pi, \pi]$ oznaczamy

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Czasami piszemy też krótko a_n, b_n, c_n, jeśli jest jasne, o jaką funkcję f chodzi.

1. Niech f będzie funkcją okresową o okresie 2π i całkowalną na przedziale $[-\pi, \pi]$. Udowodnij, że f jest całkowalna na każdym przedziale postaci $[a-\pi, a+\pi]$ dla $a \in \mathbb{R}$, przy tym $\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

2. Znajdź związek pomiędzy współczynnikami a_n, b_n i c_n.

3. Sprawdź, że jeśli funkcja f całkowalna na przedziale $[-\pi, \pi]$ spełnia dodatkowo warunek (a) $f(x+\pi) = f(x)$ lub (b) $f(x+\pi) = -f(x)$, to w pierwszym przypadku $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$, a w drugim $a_{2m} = b_{2m} = 0$.

4. Rozwiń funkcję f na przedziale $(-\pi, \pi)$ w szereg Fouriera, znajdź sumę tego szeregu, a następnie wyznacz podane sumy szeregów liczbowych.

   (a) $f(x) = x$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$

   (b) $f(x) = x^2$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$
   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$

   Wskazówka do niektórych przykładów: skorzystaj z tożsamości Parsevala.

5. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnij, że dla dowolnych $-\infty < a < b < \infty$
$$\lim_{t\to 0}\int_a^b |f(x) - f(x+t)|\,dx = 0.$$

6. (Lemat Riemanna–Lebesgue'a) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie 2π-okresową funkcją ciągłą. Udowodnij, że
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{|n|\to\infty} c_n = 0.$$
   Wskazówka: w całce definiującej n-ty współczynnik Fouriera podstaw $y = x - \frac{\pi}{n}$.

7. Niech f będzie funkcją okresową o okresie 2π i całkowalną na przedziale $[-\pi, \pi]$. Załóżmy, że $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ i zdefiniujmy funkcję F wzorem
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Sprawdź, że F jest ciągła i 2π-okresowa. Załóżmy dodatkowo, że f jest ciągła. Oblicz $c_n(F)$ w zależności od $c_n(f)$ oraz uzasadnij, że
$$\lim_{|n|\to\infty} nc_n(F) = 0.$$

8. Podaj przepis na rozwijanie funkcji f całkowalnej na przedziale $[0,\pi]$ w szereg Fouriera złożony z samych (a) kosinusów; (b) sinusów. Rozwiń funkcję sinus na przedziale $[0,\pi]$ w szereg Fouriera złożony z samych kosinusów. Następnie wykaż, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\frac{\pi-2}{4},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}.$$

Jak rozwinąć funkcję $f(x)=x^2$, $0\leqslant x<\pi$, w szereg Fouriera złożony z samych sinusów?

9. Udowodnij równości

(a) $\displaystyle \operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\quad$ dla $-\pi<x<\pi$,

(b) $\displaystyle \frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad$ dla $0\leqslant x\leqslant\pi$.

10. Załóżmy, że funkcja f ma postać $f(x)=W(\cos x,\sin x)$, gdzie W jest pewnym wielomianem dwóch zmiennych. Opisz procedurę wyznaczania szeregu Fouriera funkcji f bez obliczania współczynników Fouriera. (Wskazówka: użyj m.in. wzorów Eulera). Napisz szereg Fouriera funkcji f, jeśli: (a) $f(x)=\sin^2 x$; (b) $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x$; (c) $f(x)=\cos^4 x$. Czy można uogólnić tą procedurę na przypadek, gdy W jest funkcją wymierną dwóch zmiennych? Znajdź poniższe rozwinięcie funkcji f w szereg Fouriera

$$\text{(d) } f(x)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx,\qquad |a|<1.$$

11. Wyznacz podane sumy szeregów trygonometrycznych

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=e^{\cos x}\sin(\sin x);\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x).$$