ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Funkcje wielu zmiennych

1. Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2-x^2-y^2}}; \quad g(x,y,z) = \ln(xyz); \quad h(x,y,z) = \arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

2. Naszkicuj poziomice i wykresy funkcji

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2}; \quad g(x,y) = \ln(x^2+y^2); \quad h(x,y) = x^2-y^2.$$

3. Oblicz granice, jeśli istnieją

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{\sin^2 x}{y^2}$.

4. Pokaż, że dla funkcji $f(x,y) = (x-y)/(x+y)$ mamy

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 1, \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = -1,$$

a $\lim_{x,y\to 0} f(x,y)$ nie istnieje.

5. Pokaż, że dla funkcji $f(x,y) = x^2y^2/(x^2y^2+(x-y)^2)$ mamy

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0,$$

a jednak $\lim_{x,y\to 0} f(x,y)$ nie istnieje.

6. Narysuj poziomice funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } x^2 < y < 2x^2, \\ 0 \text{ w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Sprawdź, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{t\to\infty} f(at, bt) = 0$, a mimo to granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje.

7. Oblicz $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$ oraz $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$ jeśli

(i) $f(x,y) = (x^2+y^2)/(x^2+y^4)$, $a = b = \infty$;

(ii) $f(x,y) = \frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$, $a = 0$, $b = \infty$.

8. Oblicz granice

$$\lim_{x,y\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}, \quad \lim_{x,y\to\infty} (xy/(x^2+y^2))^{x^2}.$$