ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

1. Korzystając z definicji zbadaj istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu podanych funkcji w punkcie $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ dla } xy = 0, \\ 0 \text{ dla } xy \neq 0; \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} x \text{ dla } y = 0, \\ y^2 \text{ dla } x = 0, \\ 1 \text{ dla } xy \neq 0. \end{cases}$$

2. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji

$$f_1(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{1-xy}{x+y}, \quad f_2(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}, \quad f_3(x,y) = y^x, \quad f_4(x,y) = \arccos\frac{x}{y},$$

$$f_5(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad f_6(x,y,z) = \sin(x\cos(y\sin z)).$$

3. Korzystając z reguł różniczkowania funkcji złożonych oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y funkcji:

(a) $z = f(u,w) = \ln\dfrac{u}{1+w}, \qquad u(x,y) = x\sin y,\ w(x,y) = x\cos y;$

(b) $z = f(u,v,w) = \arcsin\dfrac{u}{v+w}, \qquad u(x,y) = e^{\frac{x}{y}},\ v(x,y) = x^2+y^2, w(x,y) = 2xy.$

4. Oblicz gradient i pochodną kierunkową funkcji f we wskazanych punktach P i kierunkach a

$$f(x,y,z) = xy^2z, \quad a = [4,3,12], \quad P = (5,1,2);$$
$$g(x,y,z) = e^{xyz}, \quad a = [\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}], \quad P = (-1,1,-1).$$

5. Sprawdź, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} \text{ dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma w punkcie $P = (0,0)$ pochodną w dowolnym kierunku, ale nie jest ciągła w P.

6. Wyznacz te wektory $a \in \mathbb{R}^2$, wzdłuż których istnieje pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \sqrt{|x^2-y^2|}$ w punkcie $(0,0)$.

7. Niech $f(x,y,z) = z - e^x \sin y$. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $P = (\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3)$ w kierunku takiego wektora o normie 1, w którym ma ona wartość: (a) najmniejszą, (b) największą.

8. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2$, w punkcie (x_0,y_0,z_0), w kierunku wektora wodzącego tego punktu. Jak wyglądają zbiory punktów $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, w których $\operatorname{grad}(f)$ jest: (a) liniowo zależny z wektorem $v = [x,y,z]$, (b) prostopadły do v?

9. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej w zadanym punkcie P do powierzchni określonej równaniem $z = f(x, y)$, jeżeli

$$\text{(a) } f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ P = (1, 0, 0), \quad \text{(b) } f(x,y) = \sin x \cos y,\ P = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}).$$

10. Oblicz: $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$ dla $f(x,y) = xe^{-y}$; $\frac{\partial^4 g}{\partial y^2 \partial x \partial y}$ dla $g(x,y) = \sin(xy)$; $\frac{\partial^5 h}{\partial z^2 \partial x \partial y^2}$ dla $h(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y - z)$.

11. Zbadaj, czy zachodzi równość $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, gdy

$$\text{(a) } f(x,y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}, \quad \text{(b) } f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{dla } |x| \leqslant |y|, \\ 2xy & \text{dla } |x| > |y|. \end{cases}$$

12. Udowodnij, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu P, to jest w tym punkcie ciągła.

13. Załóżmy, że funkcje f i g są określone w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}^2$ i różniczkowalne w tym punkcie, niech ponadto $f(a) = g(a) = 0$. Uzasadnij, że jeśli $\nabla f(a)$ i $\nabla g(a)$ są liniowo niezależne, to granica $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nie istnieje.

14. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną na prostej. Sprawdź, że $z = yf(x^2 - y^2)$ spełnia równanie różniczkowe

$$y^2 \frac{\partial}{\partial x} z + xy \frac{\partial}{\partial y} z = xz.$$

15. Operatorem Laplace'a w $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, nazywamy operator różniczkowy drugiego rzędu $\triangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Niech $u = \ln \|x\|$ gdy $n = 2$ i $u = \frac{1}{\|x\|}$ gdy $n = 3$, $x \neq 0$. Sprawdź, że u jest rozwiązaniem równania Laplace'a $\triangle u = 0$. Jak uogólnić ten wynik na przypadek $n > 3$?

16. Mówimy, że rzeczywista funkcja wielu zmiennych określona na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest jednorodna stopnia m jeśli $f(tx) = t^m f(x)$ dla $t > 0$ i $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pokaż, że jednorodna funkcja klasy C^1 spełnia tożsamość

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = mf(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

I na odwrót, jeśli f klasy C^1 spełnia taką tożsamość to jest jednorodna stopnia m.