ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Funkcje o wartościach wektorowych: różniczkowalność, jakobian

1. Narysuj pola wektorowe: (a) $F(x,y) = (y\cos x, y\sin x)$; (b) $F(x,y) = (x+y, x-y)$; (c) $F(x,y,z) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}z)$.

2. Narysuj krzywe zadane parametrycznie: (a) $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$; (b) $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ (cykloida); (c) $\gamma(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ (ewolwenta okręgu).

3. Niech $a > 0$. Krzywa γ jest zadana parametrycznie:
$$\gamma(t) = (a\cos t + a\ln|\operatorname{tg}\frac{t}{2}|, a\sin t), \quad t \in (0, \pi/2).$$
Znajdź odległość pomiędzy punktem przecięcia prostej stycznej do tej krzywej w punkcie $\gamma(t_0)$ z osią $y = 0$ a punktem $\gamma(t_0)$. Narysuj krzywą γ. Uwaga: krzywą γ nazywamy *traktrysą*.

4. Niech $f(x,y) = (x\cos(\pi y), xy)$ oraz $g(x,y) = (x + 2y, 2x - y)$. Oblicz macierze Jacobiego: funkcji g w punkcie $(1,0)$, funkcji f w punkcie $g(1,0)$ oraz funkcji $f \circ g$ w punkcie $(1,0)$. Tę ostatnią oblicz na dwa sposoby: bezpośrednim rachunkiem oraz korzystając z reguły łańcucha.

5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; piszemy $f(x) = (f^1(x), f^2(x)$. Udowodnij, że f jest różniczkowalna w $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f^1 i f^2 są różniczkowalne w a i wówczas zachodzi
$$f'(a) = \begin{bmatrix} (f^1)'(a) \\ (f^2)'(a) \end{bmatrix}.$$

6. Znajdź macierze Jacobiego następujących funkcji: (a) $f(x,y,z) = x^y$; (b) $f(x,y) = \sin(x\sin y)$; (c) $f(x,y,z) = (\sin(xy), \sin(x\sin y), x^y)$ (d) $f(x,y) = \int_0^{x+y} g(t)\,dt$, gdzie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła; (e) $f(x,y,z) = \int_{x^y}^{z} g(t)\,dt$, g jak poprzednio; (f) $f(x,y) = (x, u(x-y, x+y))$ (co trzeba założyć o funckji u?); (g) $f(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{x_1^2}{2}, x_1x_2, x_1x_3, \ldots, x_1x_n)$ w punkcie $(1,1,\ldots,1)$.

7. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ jest *dwuliniowa*, jeżeli przy ustalonych $x \in \mathbb{R}^n$ i $y \in \mathbb{R}^m$ odwzorowania $f(x,\cdot)$ i $f(\cdot,y)$ są liniowe. Udowodnij, że jeżeli f jest dwuliniowa, to
$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|} = 0.$$
Udowodnij, że $D_{(a,b)}f(x,y) = f(a,y) + f(x,b)$ dla $a, x \in \mathbb{R}^n$ i $b, y \in \mathbb{R}^m$.

8. Określmy $IP : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jako $IP(x,y) = \langle x, y\rangle$ (iloczyn skalarny x i y).
   (a) Znajdź $D_{(a,b)}(IP)$ i macierz Jacobiego IP.
   (b) Pokaż, że jeśli f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ są różniczkowalne i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem $h(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$, to
   $$h'(a) = \langle f'(a)^T, g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)^T\rangle,$$
   gdzie $f'(a)$, $g'(a)$ oznacza macierz Jacobiego odwzorowania f, odpowiednio g, w punkcie a.

9. Pokaż, że jeśli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to nie jest różnowartościowa.

10. Oblicz dywergencję i rotację pola z zadania 6(c).

11. Dla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^2 oblicz $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$.

12. Dla $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i F, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będą odpowiedniej klasy. Sprawdź prawdziwość wzorów: (a) $\operatorname{div}(fF) = \langle \nabla f, F\rangle + f \operatorname{div} F$; (b) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot} F\rangle - \langle F, \operatorname{rot} G\rangle$; (c) $\operatorname{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \operatorname{rot} F$; (d) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

13. Korzystając z pojęcia różniczki zupełnej znajdź wartość przybliżoną: (a) $1,01 \cdot 1,02$; (b) $0,99^{1,02}$; (c) $\frac{\cos x}{\cos y}$ w pobliżu punktu $(0,0)$.

14. Dany jest związek $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0$. Czy w otoczeniu punktu $(1,1)$ związek ten przedstawia funkcję $y = y(x)$? Jeśli tak, to wyznacz $y'(1)$ i $y''(1)$.

15. Znajdź pochodną funkcji $y = y(x)$ zadanej równaniem

    (a) $x^3y - xy^3 = a^4$, $a = const$;

    (b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

16. Znajdź równanie stycznej w punkcie $(1,1)$ do krzywej danej równaniem uwikłanym $ye^x - xe^y + y - x^2 = 0$.

17. Pokaż, że równanie $z^3 - 3xyz - a^3 = 0$, gdzie $a > 0$, określa funkcję uwikłaną $z = z(x,y)$ w otoczeniu każdego punktu (x_0, y_0, z_0), $z_0 > 0$, spełniającego powyższe rówanie. Znajdź płaszczyznę styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(0,0,a)$.

18. Oblicz $D_1 z$, $D_2 z$ i $D_1 D_2 z$ dla funkcji uwikłanej $z = z(x,y)$ określonej zależnością $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$.

19. Dany jest układ równań $y - z + u^2 = -y + 2z + u = 0$. W otoczeniu jakich punktów z można y i u wyrazić przez z? Analogiczne pytanie dla y lub u zamienionego z z.

20. W otoczeniu jakich punktów odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ jest odwracalne? Znajdź macierz Jacobiego f i f^{-1}. To samo dla funkcji f z zadania 6(c)(f)(g).

21. Pokaż, że równanie $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a \neq 0$, w otoczeniu punktu $(0,0)$ definiuje dwie różne funkcje różniczkowalne. Znajdź pochodne tych funkcji w zerze.

22. Niech $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$ będą funkcjami zadanymi równaniem $F(x,y,z) = 0$. Pokaż, że
$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

23. Uzasadnij, że gradient funkcji różniczkowalnej jest prostopadły do poziomicy tej funkcji.