ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

1. Napisz wzór Taylora funkcji $f(x,y) = \ln\frac{x}{y}$ w otoczeniu punktu $(1,1)$ z resztą R_1. Następnie wykaż nierówność
$$\ln\frac{x}{y} - x + y \leqslant \frac{(y-1)^2}{2} \quad \text{dla } (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1 \text{ i } y \geqslant 1.$$

2. Napisz wzór Taylora funkcji $f(x,y) = e^{\sqrt{x}y}$ w otoczeniu punktu $(1,0)$ z resztą R_2.

3. Oceń błąd bezwzględny wzorów przybliżonych (a) $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ dla $|x|$, $|y| \leqslant \frac{\pi}{3}$, (b) $\cos x \cos y \cos z - \cos(x+y+z) \approx (xy + yz + zx)$ dla $|x|$, $|y|$, $|z| \leqslant \frac{1}{10}$.

4. Wyznacz lokalne minima i maksima funkcji: (a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4$, (b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$, (c) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, (d) $f(x,y) = \sin(x+y) - \sin x - \sin y$, (e) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 - 3(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, (f) $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$, (g) $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ określonej na prostokącie $[-5,5] \times [-1,1]$.

   Czy funkcje te osiągają największe (najmniejsze) wartości w swoich dziedzinach?

5. Znajdź największe i najmniejsze wartości funkcji: (a) $f(x,y) = x + y$ na kole $x^2 + y^2 \leqslant 1$, (b) $g(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ w dziedzinie określoności, (c) $h(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ na kwadracie $0 \leqslant x, y \leqslant \frac{\pi}{2}$, (d) $k(x,y,z) = x + y + z$ na zbiorze $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

6. Niech a, b będą dwiema liczbami dodatnimi. Wyznacz liczby x_1, $\ldots$, x_n leżącę między a i b tak aby zmaksymalizować wielkość
$$u = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_n + b)}.$$

7. Wykaż, że dla każdych $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi nierówność $xe^{x(y^2+1)+1} \geqslant -1$.

8. Znajdź ekstrema lokalne funkcji uwikłanych jednej zmiennej postaci $x \mapsto y(x)$ lub $y \mapsto x(y)$ zadanych warunkami: (a) $y^3 + 2xy + x^2 = 0$; (b) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

9. Wyznacz ekstrema funkcji przy zadanych warunkach
   (a) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ pod warunkiem, że $x - y = \pi/4$;
   (b) $f(x,y) = x + y$ pod warunkiem, że $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$;
   (c) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p$ pod warunkiem, że $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, ($a > 0$, $p > 1$, $x_i \geqslant 0$).

10. Jaką maksymalną objętość może mieć prostopadłościan wpisany w elipsoidę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$?

11. Na elipsoidzie $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ znajdź punkt najbardziej odległy od punktu $(0,0,3)$.

12. Uzasadnij, że jeśli x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \geqslant 0$ oraz $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = na$, gdzie $a > 0$ jest ustalone, to
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \leqslant \binom{n}{2} a^2.$$