ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Całka podwójna i potrójna

1. Funkcja dwóch zmiennych $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie D jest prostokątem $[a,b] \times [c,d]$, jest rosnąca względem każdej ze zmiennych przy ustalonej drugiej. Udowodnij, że f jest funkcją całkowalną na D.

2. Funkcje $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna. Wykaż, że funkcja $F(x,y) = f(x)g(y)$, $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ jest całkowalna na $D = [a,b] \times [c,d]$ oraz zachodzi wzór
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_c^d g(y)\,dy.$$

3. f jest funkcją jednej zmiennej całkowalną na przedziale $[a,b]$. Rozpatrując całkę $\iint_D (f(x) - f(y))^2\,dx\,dy$ na prostokącie $D = [a,b] \times [a,b]$, wykaż nierówność
$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx.$$
Pokaż także, że jeśli f jest ciągła, to równość zachodzi jedynie w przypadku $f = const$.

4. Zastosuj twierdzenie Fubiniego i udowodnij, że jeśli pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ są ciągłe na zbiorze otwartym $\subset \mathbb{R}^2$, to są na tym zbiorze równe.

5. D jest obszarem normalnym płaskim i f funkcją ciągłą na D. Udowodnij, że istnieje punkt $p \in D$ taki, że $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(p) \cdot |D|$, gdzie D jest polem obszaru D.

6. Zamień kolejność całkowania w całkach iterowanych
$$\int_1^e dy \int_{\ln\frac{1}{y}}^{\ln y} f(x,y)\,dx; \quad \int_{-1}^1 dy \int_1^{y^3} f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{2-y^2} f(x,y)\,dx.$$

7. Każdą z całek zamień na dwie inne całki iterowane
$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz; \quad \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz.$$

8. Krzywa $x = 2|y|$ rozcina koło $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$ na trzy części. Korzystając z całek podwójnych, oblicz pole każdej z nich.

9. Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla każdego $t \geqslant 0$ określamy zbiór $K(t)$ i funkcję $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ przyjmując $K(t) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$, $F(t) = \iiint_{K(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. Uzasadnij, że $F'(t) = \pi t^2 f(t^2)/2$.

10. Wyznacz masę i środek ciężkości obszaru (a) ograniczonego osią Ox i wykresem funkcji kosinus na przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$, jeśli gęstość masy jest równa $\rho(x,y) = y$; (b) wyciętego z koła $x^2 + y^2 \leqslant 1$ parabolą $3x - 2y^2 = 0$, jeśli $\rho(x,y) = 1$.

11. Poprzez zamianę na całki iterowane oblicz

$$\iint_D y(x+y)\,dx\,dy; \quad \iint_D x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy \quad \left(= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\right),$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x=0$, $y=0$ i $x+y=1$, a $p,\ q \geqslant 1$.

12. Dla funkcji $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ciągłych i 2π-okresowych określamy funkcję $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (nazywaną *splotem* funkcji f i g) wzorem

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Pokaż, że $f*g$ również jest ciągła i 2π-okresowa. Wyraź współczynniki Fouriera funkcji $f*g$ poprzez współczynniki Fouriera funkcji f i g.

13. Oblicz pola obszarów: $D_1 = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \leqslant 2(x^2-y^2)\}$; $D_2 = \{(x,y) : px \leqslant y^2 \leqslant qx,\ ay \leqslant x^2 \leqslant by\}$, gdzie $0<p<q$ oraz $0<a<b$, stosując zamianę zmiennych w całce. (Wsk. do D_2: podstaw $s = y^2/x$, $t = x^2/y$).

14. Oblicz całki z zadania 11 podstawiając $x = s(1-t)$, $y = st$.

15. * Sprawdź, że $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{6}$ podstawiając $u = (y+x)/\sqrt{2}$, $v = (y-x)/\sqrt{2}$. Jak można stąd otrzymać równość $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$?

16. Oblicz całkę

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}\ ,$$

gdzie D jest czworościanem ograniczonym płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

17. Oblicz objętość bryły, którą z kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$, $a>0$ wycina (a) walec $x^2+y^2 \leqslant b^2$, $0<b<a$; (b) stożek $x^2+y^2=z^2$; (c) walec $x^2+y^2=ax$.

18. Oblicz objętość (i) bryły ograniczonej powierzchnią $(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}+(z/c)^{2/3}=1$, $a,\ b,\ c>0$; (ii) bryły $\{(x,y,z) : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16,\ z^2 \leqslant x^2+y^2\}$.

19. Wyznacz współrzędne środka ciężkości bryły jednorodnej ograniczonej elipsoidą $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$ i płaszczyzną $z=0$.

20. Oblicz objętość n-wymiarowej piramidy $x_1+\cdots+x_n \leqslant 1$, $x_i \geqslant 0$ dla $i=1,\ldots,n$.

21. Znajdź wzór (np. rekurencyjny) na n-wymiarową objętość kuli $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant 1$. Dla jakiego n objętość ta jest największa?

22. Wyznacz całki wielokrotne niewłaściwe

$$\iint_{D_1} e^{-(x+y)}\,dx\,dy; \quad \iiint_{D_2}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}; \quad \iint_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy,$$

gdzie $\alpha\in\mathbb{R}$, $D_1 = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant y\}$, $D_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \geqslant 1\}$, $D_3 = [0,\infty)\times[0,\infty)$, $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$ lub $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

23. Ustal, jaki jest związek pomiędzy poniższymi całkami i oblicz ich wartości

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz; \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx.$$