ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Całki krzywoliniowe

1. Sparametryzuj łukowo krzywe: (a) $C(t) = (t, \frac{4}{3}t^{3/2}, t^2)$; (b) $C(t) = (a^t \sin t, a^t \cos t)$, $a = const. > 0$; (c) krzywą płaską określoną równaniem $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$, $x \geqslant 1$.

2. Oblicz pracę jaką wykona siła (a) $F(x,y) = \left(-\frac{y^2}{x^{5/3}+y^{5/3}}, \frac{x^2}{x^{5/3}+y^{5/3}}\right)$ wzdłuż łuku asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ od punktu $(a,0)$ do punktu $(0,a)$, $a = const. > 0$; (b) $F(x,y,z) = (yz, z\sqrt{R^2-y^2}, xy)$ wzdłuż spirali $C : x = R\cos t, y = R\sin t, z = \frac{at}{2\pi}$ zawartej pomiędzy płaszczyznami $z = 0$ i $z = 3a$, gdzie R, $a = const. > 0$.

3. Oblicz całkę $\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))\,dy$, gdzie C jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru D ograniczonego przez krzywe $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Greena.

4. Za pomocą całki krzywoliniowej zorientowanej oblicz pole obszaru ograniczonego przez (a) kardioidę $C : r = a(1-\cos t)$, gdzie (r,t) są współrzędnymi biegunowymi na płaszczyźnie, $a = const. > 0$; (b) hipocykloidę $C : x = a(2\cos t + \cos 2t), y = a(2\sin t + \sin 2t)$, $a = const. > 0$.

5. Niech Ω będzie otwartym, niepustym podzbiorem $\mathbb{C}$; $\gamma : [a,b] \to \Omega$ – krzywą (kawałkami) klasy C^1; $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Zapisz całkę krzywoliniową $\int_\gamma f(z)\,dz$ znaną z wykładu z funkcji analitycznych poprzez odpowiednie całki krzywoliniowe zorientowane (napisz $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, podobnie dla γ, $\ldots$). Następnie korzystając z twierdzenia Greena i równań Cauchy–Riemanna udowodnij następujące twierdzenie Cauchy'ego: jeśli f jest funkcją holomorficzną na obszarze jednospójnym Ω, γ – krzywą zamkniętą (kawałkami) klasy C^1 zawartą w Ω, to $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

6. Załóżmy, że C jest krzywą Jordana, dla której istnieje parametryzacja $C(t) = (x(t), y(t))$ kawałkami klasy C^1, taka że $y(t) = tx(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Wykaż, że pole obszaru D ograniczonego przez krzywą C wyraża się wzorem $|D| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t))^2\,dt$. Skorzystaj z tego faktu i oblicz pola obszarów ograniczonych przez krzywe (a) $(x+y)^3 = xy$; (b) $x^4 + y^4 = x^2 y$.

7. Sprawdź, czy wyrażenie (a) $\omega = (3x^2y^4 - 6xy - 4)dx + (4x^3y^3 - 3x^2 + 5)dy$; (b) $\omega = (\ln|xy| + 1 - \sin(x-y))dx + \left(\left|\frac{x}{y}\right| + \sin(x-y)\right)dy$ jest różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych U na jakimś obszarze D. Jeśli tak, to znajdź funkcję U na D.

8. Sprawdź, czy pole wektorowe
$$\text{(a)}\;\; F = \frac{1}{3x^2 - 2xy + 3y^2}(y, -x); \quad \text{(b)}\;\; F = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}, \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)$$
jest polem potencjalnym w jakimś obszarze D. Jeśli tak, to wyznacz jego potencjał na tym zbiorze.

9. Znajdź funkcje różniczkowalne φ jednej zmiennej, dla których całka krzywoliniowa zorientowana $\int_C (2xy\varphi(y) + y)\,dx + (x - 2x^2\varphi(y))\,dy$ nie zależy od drogi całkowania. W jakich obszarach to jest możliwe?

10. Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że $\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy) = 0$ dla dowolnej krzywej Jordana $C \subset \mathbb{R}^2$ kawałkami klasy C^1.

11. Oblicz całkę $\oint_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}$, gdzie C jest elipsą (a) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; (b) $\frac{x^2}{4}+(y-2)^2=1$.

12. Oblicz masę: (a) okręgu $L : x^2+y^2+2y=0$, jeśli gęstość masy w dowolnym punkcie $(x,y) \in L$ jest równa promieniowi wodzącemu tego punktu; (b) stożkowej linii śrubowej $C : x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, jeśli $\rho(x,y,z) = 2z-\sqrt{x^2+y^2}$.

13. Ω jest jednospójnym obszarem płaskim, C – dodatnio zorientowaną krzywą Jordana kawałkami klasy C^1, $C \subset \Omega$, D jest obszarem ograniczonym przez C i $F = (P,Q)$ jest polem wektorowym klasy C^1 na obszarze Ω. Niech $T(s)$ oznacza wektor jednostkowy styczny do C w punkcie $C(s)$ (tam gdzie istnieje), a $N(s)$ normalną zewnętrzną, tzn. wektor jednostkowy prostopadły do $T(s)$ i skierowany na zewnątrz obszaru D. Wówczas $T(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, $N(s) = (y'(s), -x'(s)) = (\sin\alpha(s), -\cos\alpha(s))$, gdzie $(x(s), y(s))$ jest parametryzacją łukową krzywej C, a $\alpha(s) = \angle(T(s), Ox)$ jest kątem zorientowanym zawartym pomiędzy styczną $T(s)$ a osią Ox. Uzasadnij związek pomiędzy całką krzywoliniową zorientowaną i niezorientowaną $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds$. Zamień całki niezorientowane $\int_C \langle F, T\rangle\,ds$, $\int_C \langle F, N\rangle\,ds$ na całki zorientowane.

14. Niech Ω, C, D, N i T będą takie, jak w zadaniu 13. Ponadto zakładamy, że pole wektorowe $F = (P,Q)$ i funkcje f, g są klasy C^2 na obszarze Ω. Uzasadnij, że

$$\oint_C \langle F, N\rangle\,ds = \iint_D \operatorname{div} F\,dx\,dy, \quad \oint_C D_T f\,ds = 0, \quad \oint_C D_N f\,ds = \iint_D \Delta f\,dx\,dy;$$

$$\iint_D (\langle \nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f)\,dx\,dy = \oint_C g D_N f\,ds;$$

$$\iint_D (g\Delta f - f\Delta g)\,dx\,dy = \oint_C (g D_N f - f D_N g)\,ds.$$

Ostatnie dwa wzory nazywane są wzorami Greena.

15. Funkcję f nazywamy harmoniczną na obszarze Ω, jeśli spełnia na nim równanie Laplace'a $\Delta f = 0$. Podaj przykłady funkcji harmonicznych (wsk.: sprawdź, że jeśli h jest holomorficzna, to $f(x,y) = \operatorname{Re} h(x+iy)$ jest harmoniczna). Wykaż, że równanie $\Delta f = 0$ ma charakter niezmienniczy względem konforemnej zmiany współrzędnych, tzn. takiej zmiany współrzędnych $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, dla której funkcje φ, ψ są klasy C^2 i spełniają warunki $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $(\frac{\partial\varphi}{\partial u})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial v})^2 > 0$.

16. Ω jest jednospójnym obszarem płaskim, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – funkcją klasy C^2. Wykaż, że f jest harmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\oint_C D_N f\,ds = 0$ dla dowolnej krzywej Jordana $C \subset \Omega$ kawałkami klasy C^1.

17. f jest funkcją harmoniczną na obszarze jednospójnym Ω i $(x_0, y_0) \in \Omega$. Udowodnij, że jeśli O_R jest dowolnym okręgiem o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu R zawartym w obszarze Ω, to $f(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{O_R} f(x,y)\,ds$. Wskazówka: skorzystaj m.in. z zadania 14 dla $g(x,y) = \ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

18. Sformułuj zasadę maksimum dla funkcji harmonicznych (przez analogię do znanej zasady maksimum dla funkcji holomorficznych), a następnie ją udowodnij.