ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Całki powierzchniowe

1. Wiadomo, że sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nie jest prostym płatem powierzchniowym. Wykaż, że górna półsfera $S^+ : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geqslant 0$ jest płatem powierzchnowym, podobnie dolna półsfera. Wsk. Można użyć parametryzacji wykorzystującej tzw. rzut stereograficzny (z bieguna południowego sfery prowadzi się proste przecinające płaszczyznę $Oxy\ldots$).

2. Określ typ powierzchni S (prosty płat powierzchniowy, płat powierzchniowy), jeśli jest ona obrazem podanego odwzorowania:

   (a) $r(\varphi, \psi) = (a \cos\varphi \cos\psi, b \sin\varphi \cos\psi, c \sin\psi)$, $(\varphi, \psi) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a, b, $c = const. > 0$ (elipsoida);

   (b) $r(\varphi, z) = (f(z) \cos\varphi, f(z) \sin\varphi, z)$, $(\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$, f jest funkcją dodatnią i klasy C^1 na przedziale $[a, b]$ (powierzchnia obrotowa);

   (c) $r(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$, $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, a, $b = const.$, $0 < b < a$ (torus).

3. Znajdź pole wektorów jednostkowych wzdłuż (a) powierzchni $S : -2x^2-y^2+z^2 = 1$, $x \geqslant 0$; (b) powierzchni z zadania 2(b) i 2(c).

4. Wyznacz płaszczyznę styczną i prostą normalną do (a) powierzchni $S : y = z^2 - x^2$ w punktach, w których płaszczyzna ta jest równoległa do płaszczyzny $y + z = 0$; (b) powierzchni obrotowej z zadania 2(b) dla $f(z) = e^{z-1}$, w punktach, w których płaszczyzna ta jest prostopadła do prostej określonej warunkami $y = 0$, $x + z = 0$.

5. Wyznacz element powierzchni i oblicz pole (a) powierzchni $S : x^2 + y^2 + z - 2 = 0$, $z \geqslant 1$; (b) powierzchni z zadania 2(b) i 2(c).

6. Załóżmy, że C jest krzywą płaską, $C(t) = (x(t), y(t))$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ jej parametryzacją kawałkami gładką i f jest dodatnią funkcją klasy C^1 na pewnym otoczeniu zawierającym krzywą C. Tworzymy powierzchnię

$$S : r(t, u) = (x(t), y(t), uf(x(t), y(t))), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

   Wykaż, że powierzchnia S ma pole równe całce krzywoliniowej niezorientowanej $\int_C f(x, y)\, ds$.

7. Oblicz współrzędne środka ciężkości powierzchni całkowitej walca $S : x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, r, $h = const. > 0$, jeśli gęstość powierzchniowa masy jest postaci $\rho(x, y, z) = z$. Wykonaj to samo dla części stożka $x^2 + y^2 = R^2z^2/H^2$ odciętej płaszczyzną $z = H$, gdzie R, $H = const. > 0$, $\rho = 1$.

8. Wyznacz moment bezwładności względem osi Oz masy jednorodnej o gęstości $\rho = 1$ rozłożonej na powierzchni $S : (z - 1)^2 = x^2 + y^2$, $1 \leqslant z \leqslant 3$. Wykonaj to samo dla fragmentu sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ wyciętego płaszczyzną $z = H$, gdzie R, $H = const. > 0$.

9. Oblicz całkę $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, gdzie $S : z = xy$, $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, górna strona powierzchni S jest dodatnia.

10. $C(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, jest parametryzacją krzywej C. Wyznacz całkę $\int_C z\,dx + 2x\,dy + y^2\,dz$ (a) bezpośrednim rachunkiem; (b) korzystając z twierdzenia Stokesa.

11. Niech a będzie polem wektorowym klasy C^1 na pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Potencjałem wektorowym pola a nazywamy każde pole wektorowe b takie, że $\operatorname{rot} b = a$. Mówimy wówczas, że pole a ma potencjał wektorowy. Udowodnij, że: (1) jeśli pole a ma potencjał wektorowy, to $\operatorname{div} a = 0$; (2) na odwrót, jeśli $\operatorname{div} a = 0$, to dowolny punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ posiada otoczenie, na którym pole a ma potencjał wektorowy, przy czym jest on zadany wzorem

$$b = \left(0, \int_{x_0}^{x} a_3(x, y, z)\,dx, -\int_{x_0}^{x} a_2(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} a_1(x_0, y, z)\,dy\right) + \nabla f,$$

gdzie $a = (a_1, a_2, a_3)$ i f jest dowolną funkcją skalarną klasy C^2.

12. Sprawdź, czy pole (a) $a = (xz, -yz, y)$; (b) $a = (2|x|, |y|, |z|)$ posiada potencjał wektorowy i ewentualnie znajdź ten potencjał. Na jakich obszarach jest to możliwe?

13. Niech D będzie obszarem spełniającym założenia twierdzenia Gaussa–Ostrogradzkiego, S jego brzegiem zorientowanym zewnętrznie i f, g funkcjami klasy C^2 na D. Udowodnij wzory całkowe

$$(a)\ \iiint_D (\langle \nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f)\,dx\,dy\,dz = \iint_S g D_n f\,dS;$$
$$(b)\ \iiint_D (g\Delta f - f\Delta g)\,dx\,dy\,dz = \iint_S (g D_n f - f D_n g)\,dS;$$
$$(c)\ \iiint_D \Delta f\,dx\,dy\,dz = \iint_S D_n f\,dS.$$

14. Sformułuj i udowodnij odpowiedniki w R^3 stwierdzeń zawartych w zadaniach 16,17 i 18 z poprzedniej listy zadań.

Ponadto: Zadania ze skryptu ogólnouczelnianego dotyczące całek powierzchniowych oraz twierdzeń Gaussa–Ostrogradzkiego i Stokesa.