ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1 jeszcze raz

8 grudnia 2003

Grupa ćwiczeniowa Bartka Dydy.

1. Sprawdź z definicji, że ciąg $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

2. Ciąg (a_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie: $a_1 = \frac{\pi}{2}$; $a_{n+1} = \sin(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Rozstrzygnij, czy ciąg (a_n) jest zbieżny i znajdź zbiór punktów skupienia tego ciągu.

3. (a) Znajdź granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n}$.
   (b) Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{2n} + n}\,.$$

4. (a) Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)}$ nie korzystając z reguły de l'Hospitala.
   (b) Niech $f(x) = \sin x + (x^2 - 1)^x x^{-2x} \cos x$ dla $x > 1$. Uzasadnij, że $\liminf\limits_{x\to\infty} f(x) = -\sqrt{2}$.

5. Funkcje $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ są ciągłe, $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ wzorem $f(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.
   (a) Pokaż na przykładzie, że f nie musi być ciągła.
   (b) Udowodnij, że $\forall_{x_0\in\mathbb{R}} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in\mathbb{R}} \left(|x - x_0| < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon\right)$.

Punktacja: za zadania 1, 2, 3, 4, 5 można otrzymać odpowiednio 10, 15, 25, 30, 20 punktów.