ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1

25 listopada 2003

Grupa ♣

1. (a) Sprawdź z definicji Cauchy'ego, że funkcja $f(x) = x^3$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.
   (b) Sprawdź z definicji, że ciąg $(-1)^n$ nie spełnia warunku Cauchy'ego.

2. (a) Oblicz
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5n^2-3k}}\right).$$
   (b) Niech $a_k = \frac{k^2-k}{k^2-k-2}$ dla $k = 3, 4, \ldots$. Oblicz $\lim_{n\to\infty}(a_3a_4a_5\ldots a_n)$.
   (c) Oblicz $\liminf_{x\to\infty} f(x)$ i $\limsup_{x\to\infty} f(x)$ dla $f(x) = 4x - 2[2x] + \frac{1}{x^2}$.

3. Rozstrzygnij, czy granica $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+4}\right)^{x+\sin\frac{\pi x}{2}}$ istnieje. Odpowiedź uzasadnij.

4. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zakładamy, że $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x^2)$ istnieje i jest skończona. Udowodnij, że
$$\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x} = 2.$$

Punktacja: za zadania 1, 2, 3, 4 można otrzymać odpowiednio 20, 40, 15, 20 punktów,
a za sposób redagowania (komentarze, układ graficzny, czytelność pisma) 5 punktów.

ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1

25 listopada 2003

Grupa ♢

1. (a) Sprawdź z definicji Cauchy'ego, że funkcja $f(x) = x^3$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 3$.
   (b) Sprawdź z definicji, że ciąg $(-1)^n$ nie spełnia warunku Cauchy'ego.

2. (a) Oblicz
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3n^2-2k}}\right).$$
   (b) Niech $a_k = \frac{k^2-k}{k^2-k-2}$ dla $k = 3, 4, \ldots$. Oblicz $\lim_{n\to\infty}(a_3a_4a_5\ldots a_n)$.
   (c) Oblicz $\liminf_{x\to\infty} f(x)$ i $\limsup_{x\to\infty} f(x)$ dla $f(x) = 4x - 2[2x] - \frac{1}{x^2}$.

3. Rozstrzygnij, czy granica $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+\cos\frac{\pi x}{2}}$ istnieje. Odpowiedź uzasadnij.

4. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zakładamy, że $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x^2)$ istnieje i jest skończona. Udowodnij, że
$$\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x} = 2.$$

Punktacja: za zadania 1, 2, 3, 4 można otrzymać odpowiednio 20, 40, 15, 20 punktów,
a za sposób redagowania (komentarze, układ graficzny, czytelność pisma) 5 punktów.