

ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium poprawkowe

30 stycznia 2004

1. Oblicz granicę ciągu $a_n = n(\ln(n+1) - \ln(n-1))$. [20 p.]
2. Oblicz $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x)$ i $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$, jeśli $f(x) = (2 + \frac{1}{x}) \sin x$ dla $x > 0$. [25 p.]
3. Sformułuj twierdzenie Weierstrassa. Podaj przykład funkcji nieciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która osiąga swoje kresy na każdym niepustym podzbiornie \mathbb{R} . Krótko uzasadnij, że podany przykład jest dobry. [20 p.]
4. Sformułuj twierdzenie Darboux. Rozstrzygnij, czy równanie $\cos x = x^2 - 4x + 2$ ma rozwiązanie rzeczywiste. [15 p.]
5. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a . Sprawdź, że funkcja $g(x) = (x-a)f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $x = a$. [15 p.]
6. Korzystając z reguły de l'Hôpitala oblicz [25 p.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - \cos x) \operatorname{ctg} x}{1 + x^2}.$$

7. Napisz wielomian Maclaurina $W_2(x)$ stopnia drugiego dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+2x}$. Oszacuj (możliwie dobrze) dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt{1,02} \approx W_2(0,01)$. [30 p.]
8. Oblicz całkę [30 p.]

$$\int \frac{\ln x + 2}{3x \ln^2 x + 7x} dx.$$

ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Drugie kolokwium jeszcze raz

30 stycznia 2004

1. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa. Udowodnij, że f jest jednostajnie ciągła. [19 p.]
2. Uzasadnij tożsamość [15 p.]

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x \quad \text{dla } |x| \geq 1.$$

3. Korzystając z reguły de l'Hôpitala oblicz [15 p.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - \cos x) \operatorname{ctg} x}{1 + x^2}.$$

4. Napisz wielomian Maclaurina $W_2(x)$ stopnia drugiego dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+2x}$. Oszacuj (możliwie dobrze) dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt{0,98} \approx W_2(-0,01)$. [19 p.]
5. Oblicz całki [32 p.]

$$(a) \int \frac{\ln x + 3}{2x \ln^2 x + 4x \ln x + 5x} dx; \quad (a) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin(2x) + \cos^2 x}.$$