Grupa A

1. (a) Sprawdź bezpośrednio z definicji Cauchy'ego, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

   (b) Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji określonej wzorami $g(x) = x \cos \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $g(0) = 0$.

   (c) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia nierówność $2|f(x) - x| \leqslant |f(x)|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Uzasadnij, że f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

2. Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+n}{1+n}\right)^{n+\sin n}.$$

3. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ oraz $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Uzasadnij, że (x_n) jest zbieżny do granicy właściwej.

4. Oblicz:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$, (b) $\displaystyle\liminf_{x\to\infty} g(x)$ oraz $\displaystyle\limsup_{x\to\infty} g(x)$ dla $g(x) = \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] - \frac{2}{x}$.

5. Załóżmy, że funkcja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b$, monotonicznie rośnie i jest ograniczona z dołu. Uzasadnij, że istnieje skończona granica $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Grupa B

1. (a) Sprawdź bezpośrednio z definicji Cauchy'ego, że funkcja $g(x) = \sqrt{x+1}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

   (b) Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji określonej wzorami $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$.

   (c) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia nierówność $2|f(x) - x| \leqslant |f(x)|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Uzasadnij, że f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

2. Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-\cos n}.$$

3. Ciąg (y_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ oraz $y_{n+2} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Uzasadnij, że (y_n) jest zbieżny do granicy właściwej.

4. Oblicz:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 27} \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - 3}$, (b) $\liminf\limits_{x\to\infty} f(x)$ oraz $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)$ dla $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]$.

5. Załóżmy, że funkcja $g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $a < b < \infty$, monotonicznie maleje i jest ograniczona z dołu. Uzasadnij, że istnieje skończona granica $\lim_{x\to b^-} g(x)$.