ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 2, 27 stycznia 2006

1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$
Udowodnij, że f jest ciągła jednostajnie na $\mathbb{R}$. [11 p.]

2. (a) Sformułuj twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. [1 p.]
   (b) Uzasadnij korzystając z (a), że jeśli f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$, to istnieje liczba $c \in \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = g(x) + c$ dla każdego $x \in (a,b)$. [4 p.]
   (c) Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, oblicz pochodną funkcji arccos, czyli funkcji odwrotnej do funkcji cosinus rozpatrywanej na odcinku $[0,\pi]$. [3 p.]
   (d) Uzasadnij, że $3\arccos x - \arccos(3x-4x^3) = \pi$ dla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. [3 p.]

3. Napisz wielomian Taylora stopnia 2 dla funkcji $f(x) = \cos 2x$ w punkcie $x_0 = \pi/2$ oraz resztę w dowolnej postaci, następnie oszacuj tę resztę z góry dla $|x - \pi/2| < \frac{1}{4}$. [7 p.]

4. (a) Napisz wielomiany Maclaurina n-tego stopnia funkcji sin, cos, exp. [2 p.]
   (b) Używając notacji $o(x)$ i części (a) zadania, oblicz granicę [8 p.]
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^{2x^2}}{x\sin x - x^2}.$$
Uwaga. Można w ostateczności obliczyć powyższą granicę korzystając z reguły de l'Hôspitala (3 punkty zamiast 8).
Uwaga 2 (dodana później). W zamierzeniu miała być do policzenia granica
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^{-2x^2}}{x\sin x - x^2}.$$

5. Oblicz całki nieoznaczone [4+7 p.]
$$\int e^x \sin 2x\, dx; \qquad \int \frac{x^2}{x^2 - x + 1}\, dx.$$

Łączna punktacja: 11+11+7+10+11=50 punktów.
Powodzenia!