

# ANALIZA MATEMATYCZNA 1, WPPT (MATEMATYKA)

31 stycznia 2006

1. Funkcja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła oraz  $f(x) = x^x$  dla  $x > 0$ . Znajdź wartość  $f(0)$  (wsk. reguła de l'Hôpitala); znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  na odcinku  $[0, 2]$ .
2. (a) Sformułuj twierdzenie Darboux.  
(b) Uzasadnij, że równanie  $f(x - [x]) = 6/7$  ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach rzeczywistych  $x$ , gdzie  $f(x) = x^{14} + 2x^{11} - 2x$ .
3. Oblicz  $\int (\operatorname{ctg} x)^2 dx$ .
4. Oblicz

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^{2\sqrt{n^2+1}} \quad \text{oraz} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^{2\sqrt{n^2+1}}.$$

*Uwaga.* Rozwiązanie połowy z powyższych zadań uprawniało jedynie do pisania egzaminu pomimo niezaliczonych ćwiczeń (i nic ponadto!).