

Analiza Matematyczna 1 – Kolokwium 1

1. Udowodnić, że dla każdego $n \geq 2$ spełniona jest nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

2. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n + 6^n) - \ln(2 + 3^n)}{\ln(1 + 3^n)}.$$

3. Ciąg (x_n) zadany jest warunkami

$$x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n + 5} \quad \text{dla dowolnego } n \geq 1.$$

Sprawdzić, że ciąg (x_n) jest ograniczony i monotoniczny. Obliczyć jego granicę.

4. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Na zbiorze $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiujemy funkcję d następująco:

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{p^n} & \text{gdy } x \neq y \text{ oraz } p^n | (x - y), \text{ ale } p^{n+1} \nmid (x - y); \quad (\text{tutaj } n = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{gdy } x = y. \end{cases}$$

Sprawdzić, że d jest metryką. Jak wygląda kula $K(0, 1)$?

5. Niech ciąg (a_n) będzie zbieżny. Udowodnić, że ciąg (a_n) zawiera podciąg monotoniczny.
Czy założenie zbieżności (a_n) można zastąpić założeniem tylko ograniczoności?
A czy można to założenie w ogóle pominąć?