Analiza Matematyczna 1 – Kolokwium 2, grupa ♣

1. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{ctg}(\pi x))^x.$$

2. Funkcja $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ jest ciągła. Pokazać, że istnieje punkt $c \in [0,1]$ taki, że $f(c) = 1 - c$. *Wskazówka: wykonać rysunek pomocniczy.*

3. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = x\sin(\pi x)$ w punkcie $x_0 = 2$ z resztą R_3. Oszacować wielkość otrzymanej reszty dla $|x-2| < 1/4$.

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła jednostajnie i ograniczona, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – ciągła. Uzasadnić, że złożenie $g \circ f$ jest funkcją jednostajnie ciągłą. Czy można pominąć założenie ograniczoności f? Czy można zastąpić założenie ciągłości jednostajnej f założeniem ciągłości? Odpowiedzi uzasadnić.

5. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona, oraz $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Pokazać, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Analiza Matematyczna 1 – Kolokwium 2, grupa ♢

1. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{ctg}\, 2x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

2. Funkcja $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ jest ciągła. Pokazać, że istnieje punkt $c \in [0,1]$ taki, że $f(c) = c^2$. *Wskazówka: wykonać rysunek pomocniczy.*

3. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = x\cos(\frac{\pi}{2}x)$ w punkcie $x_0 = 1$ z resztą R_3. Oszacować wielkość otrzymanej reszty dla $|x-1| < 1/3$.

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła jednostajnie i ograniczona, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – ciągła. Uzasadnić, że złożenie $g \circ f$ jest funkcją jednostajnie ciągłą. Czy można pominąć założenie ograniczoności f? Czy można zastąpić założenie ciągłości jednostajnej f założeniem ciągłości? Odpowiedzi uzasadnić.

5. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona, oraz $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Pokazać, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.