# Kolokwium nr 1, 22.04.04

**Zad.1.** Zbadaj zbieżność całek:

(a) (6p) $\int_0^\infty \frac{x\ arctg\, x}{(1+x^2)^2}dx$; (b) (7p) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^{\frac{1}{2}} x dx$; (c) (8p) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$.

**Zad.2.** Zbadaj zbieżność (bezwzględną i warunkową) szeregów:

(a) (8p+4p) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n+\ln^2 n}$; (b) (2p+4p) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

**Zad.3.** (a) (16p) Wykazać, że jeśli $\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} > -1$ to $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest rozbieżny.

(b) (5p) Wiedząc, że $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ oblicz

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2(n+1)}.$$

**Zad.4.** (a) (8p) Udowodnij, że jeśli $f$ jest funkcją całkowalną na dowolnym skończonym przedziale $[a, b]$ i okresową o okresie $T$, to

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n \cdot \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

(b) (10p) Niech $f$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnij, że

$$\int_0^\pi f(\sin x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x f(\sin x)dx.$$

**Zad.5.** (a) (16p) Udowodnij, że jeśli $f$ jest funkcją całkowalną i nieujemną na przedziale $[a, b]$, to z nierówności

$$\int_a^b f(t)dt > 0$$

wynika, że zbiór $\{t \in [a, b] \ :\ f(t) = 0\}$ nie jest gęsty w $[a, b]$.

(b) (6p) Uzasadnij, że poniższa całka istnieje i następnie oblicz ją wprost z definicji

$$\int_0^1 t^3 dt.$$