Kolokwium nr 1bis, 10.05.04

Uwaga: należy formułować wykorzystywane kryteria zbieżności szeregów i całek!

Zad.1. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Uzasadnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Zad.2. Zbadaj zbieżność (bezwzględną i warunkową) szeregów:

$$\text{(A)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(2n)^n}; \qquad \text{(B)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log_2 n}; \qquad \text{(C)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1]^n}{n^2 + 2^n}.$$

Uwaga: Wiemy, dla jakich q i a szeregi postaci $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ są zbieżne, a dla jakich rozbieżne; można z tego korzystać bez dowodu. Natomiast zbieżność lub rozbieżność szeregów innej postaci należy uzasadnić!

Zad.3. (A) Czy z bezwzględnej zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika bezwzględna zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1+a_n)$?
(B) Czy ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1+a_n)$?
Odpowiedzi uzasadnij podając dowód lub kontrprzykład.

Zad.4. Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych:

$$\text{(A)} \ \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2 \sin x}\,dx, \qquad \text{(B)} \ \int_1^{\infty} \frac{(-1)^{[2x]}\,dx}{(\operatorname{arctg} x)^2}, \qquad \text{(C)} \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{|x|}}, \qquad \text{(D)} \ \int_{-\infty}^{0} x^9 e^{2x} dx.$$

Zad.5. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-\frac{k}{n}} \cos \frac{k\pi}{n}}{3n+2}.$$

Punktacja:
zadanie 1: 18 punktów,
zadanie 2: 19 punktów,
zadanie 3: 13 punktów,
zadanie 4: 7+9+9+12 = 37 punktów,
zadanie 5: 13 punktów.