ANALIZA MATEMATYCZNA 2, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1, grupa $\heartsuit$, 22 kwietnia 2004

Uwaga: należy formułować wykorzystywane kryteria zbieżności szeregów i całek!

1. Zbadaj zbieżność następujących szeregów:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2}}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^5$ przy założeniu, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

   (W przykładzie (c) należy udowodnić zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^5$ lub wskazać przykład szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takiego, że $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^5$ jest rozbieżny).

2. Niech $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ będzie iloczynem Cauchy'ego szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ przez siebie. Oblicz c_0, c_1, c_2. Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnij.

3. Udowodnij, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{K\subset\mathbb{N},\mathrm{card}\,K<\aleph_0}\ \forall_{M\subset\mathbb{N},\mathrm{card}\,M<\aleph_0}\ (M\cap K=\emptyset \implies |\sum_{m\in M} a_m| < \varepsilon).$$

4. Sprawdź z definicji, czy całka niewłaściwa $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\,dx}{x^4+1}$ jest zbieżna i jeśli tak, to ją oblicz.

5. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność całek niewłaściwych

   (a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(-1)^{[2x]}}{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}(2x)}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{(1-x)^a}$

   w zależności od parametru $a>0$.

6. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{n\sqrt[n]{e^k}}.$$

   Uwaga: w sumie powyżej występuje n^2 składników. W razie kłopotów z obliczeniem granicy proszę zastąpić $\sum_{k=1}^{n^2}$ przez $\sum_{k=1}^{n}$. [9 zamiast 16 punktów]

Punktacja:
zadanie 1: 19 punktów,
zadanie 2: 11 punktów,
zadanie 3: 20 punktów,
zadanie 4: 8 punktów,
zadanie 5: 26 punktów,
zadanie 6: 16 punktów.

ANALIZA MATEMATYCZNA 2, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1, grupa $\star$, 22 kwietnia 2004

Uwaga: należy formułować wykorzystywane kryteria zbieżności szeregów i całek!

1. Zbadaj zbieżność następujących szeregów:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos n}{(\pi + \sin n)^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n^3$ przy założeniu, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

   (W przykładzie (c) należy udowodnić zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n^3$ lub wskazać przykład szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takiego, że $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n^3$ jest rozbieżny).

2. Niech $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ będzie iloczynem Cauchy'ego szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ przez siebie. Oblicz c_0, c_1, c_2. Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnij.

3. Udowodnij, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{K\subset\mathbb{N},\operatorname{card} K<\aleph_0}\ \forall_{M\subset\mathbb{N},\operatorname{card} M<\aleph_0}\ \Big(M\cap K=\emptyset \implies \Big|\sum_{m\in M} a_m\Big| < \varepsilon\Big).$$

4. Sprawdź z definicji, czy całka niewłaściwa $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3\,dx}{1-x^4}$ jest zbieżna i jeśli tak, to ją oblicz.

5. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność całek niewłaściwych

   (a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(-1)^{[2x]}}{\sqrt{x}\operatorname{arctg}(3x)}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{(1-x)^a}$

   w zależności od parametru $a > 0$.

6. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{n+\frac{k^2}{n}}.$$

   Uwaga: w sumie powyżej występuje n^2 składników. W razie kłopotów z obliczeniem granicy proszę zastąpić $\sum_{k=1}^{n^2}$ przez $\sum_{k=1}^{n}$. [9 zamiast 16 punktów]

Punktacja:
zadanie 1: 19 punktów,
zadanie 2: 11 punktów,
zadanie 3: 20 punktów,
zadanie 4: 8 punktów,
zadanie 5: 26 punktów,
zadanie 6: 16 punktów.