Kolokwium nr 2, 31.05.04

Zad.1. (a) (10p) Zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}\,dx.$$

(b) (13p) Uzasadnij, że całka

$$\int_1^\infty x^a e^{-2x}\,dx$$

jest zbieżna jednostajnie ze względu na parametr $a \in (-\infty, 2004)$.

Zad.2. (20p) Wykaż, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{n}}} \ln(1+t^2)dt$$

jest różniczkowalna na $(0,\infty)$. Czy f' jest ciągła na $(0,\infty)$?

Zad.3. (a) (2 + 2p) Sformułuj kryteria Abela i Dirichleta zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego.

(b) (8p) Zbadaj zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

(c) (8p) Określ dziedzinę zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(1+\frac{x}{n})}$$

i zbadaj jego zbieżność jednostajną na przedziale $[0,\infty)$.

Zad.4. (a) (10p) Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$.

(b) (10p) Wyznacz rozwinięcie funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ w szereg Maclaurina.

(c) (5p) Oblicz $f^{(2004)}(0)$ gdy $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Zad.5. (12p) Dla $m \in (-\infty, 2)$ kładziemy

$$f(m) = \int_0^{\pi/4} \ln(1 - m\sin^2 x)\,dx.$$

Krótko uzasadnij, że funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. Oblicz $f'(1)$.

Powodzenia!