

Kolokwium Zaliczeniowe, 26.06.04

Zad.1. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną całek:

$$(a) \int_0^{\infty} (-1)^{[3x]} \frac{dx}{x}, \quad (b) \int_1^{\infty} (-1)^{[3x]} \frac{dx}{x}.$$

Zad.2. Zbadaj zbieżność całek:

$$(a) \int_0^{\infty} 2^{-x} x^3 \cos x \, dx, \quad (b) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} e^{-\frac{1}{x-1}} \, dx.$$

Zad.3. Czy ciąg $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ jest zbieżny jednostajnie na \mathbb{R} ? Odpowiedź uzasadnić.

Zad.4. Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Przyjmijmy: $b_n = -a_n$ dla $n = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ i $b_n = a_n$ w pozostałych przypadkach. (a) Co można powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie? (b) Podaj przykład takiego ciągu $\{a_n\}$, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny. (c) Podaj przykład takiego ciągu $\{a_n\}$, że oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne warunkowo.

Zad.5. Zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n+1) - \sin(n)), \quad (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3+\cos(n\pi))}{2\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}.$$

Zad.6. Wyznaczyć dziedzinę zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\cos(n\pi))^n}{n^2} (x+7)^{-n}$.

Zad.7. (a) Określić przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$. (b) Obliczyć jego sumę.

Zad.8. (a) Rozwinąć funkcję $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ w szereg Maclaurina. (b) Obliczyć $f^{(17)}(0)$.

Zad.9. Niech $y > 0$ i $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \, dx$. Zbadać: (a) ciągłość (b) różniczkowalność funkcji F . (c) W przypadku gdyby F okazała się różniczkowalna obliczyć $F'(y)$.

Zad.10. Funkcję $f(x) = e^{2x}$ rozwinąć w szereg: (a) sinusów (b) kosinusów. Na jakich przedziałach znalezione rozwinięcia zbiegają do funkcji f ?

Uwagi: 1. Punktacja: każde zadanie za 20 punktów.

2. Proszę starać się rozwiązywać zadania w całości – rozpoczęte, ale niedokończone podpunkty będą bardzo nisko oceniane (zwykle na 0 pkt.).

3. Do punktów zdobytych na tym kolokwium doliczamy połowę zdobytych w semestrze, do zaliczenia potrzeba łącznie 126 punktów.