

Grupa ♡

1. Oblicz [9 pkt.]

$$\int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\cos x} dx.$$

2. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów [12 pkt.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (\sqrt{n^2+1} - n).$$

3. Oblicz iloczyn nieskończony [9 pkt.]

$$\prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

4. Oblicz granicę [10 pkt.]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt[4]{\frac{2k+1}{n}}\right).$$

5. Niech (b_n) będzie ustalonym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Udowodnij, że istnieje szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest rozbieżny. [10 pkt.]

Grupa ★

1. Oblicz [9 pkt.]

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx.$$

2. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów [12 pkt.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (n - \sqrt{n^2 - 1}).$$

3. Oblicz iloczyn nieskończony [9 pkt.]

$$\prod_{n=4}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n-2)}\right).$$

4. Oblicz granicę [10 pkt.]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt[3]{\frac{2k-1}{n}} \right).$$

5. Niech (b_n) będzie ustalonym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Udowodnij, że istnieje szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest rozbieżny. [10 pkt.]