Grupa ♡

1. Sprawdź zbieżność całek niewłaściwych:

$$\text{(a)}\quad \int_0^1 \frac{dx}{\cos^2 x + \sin x - 1}, \qquad \text{(b)}\quad \int_3^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

2. Uzasadnij, że szereg funkcyjny

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x^2}{n}$$

   jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i że tak określona funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}$.

3. Znajdź szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt, \quad x \in R,$$

   korzystając m.in. ze znanego rozwinięcia funkcji sinus. Oblicz pochodną $f^{(103)}(0)$. (Uwaga: proszę nie próbować bezpośrednio obliczać całki $\int \sin(t^2)\, dt$, to się nie uda...).

4. Wyznacz obszar zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - (-1)^n)^n}{n} x^n$$

5. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ istnieje ciąg wielomianów P_n taki, że $P_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ oraz $f(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x)$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Weierstrassa. (Prostsza wersja za nieco mniej punktów: tylko warunek $f(x) \leqslant P_n(x)$ zamiast $f(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x)$).

Grupa ⋆

1. Sprawdź zbieżność całek niewłaściwych:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4} + e^x - 1}, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^2+x^3} dx.$$

2. Uzasadnij, że szereg funkcyjny

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(x + \frac{1}{n})}{n^2}$$

jest zbieżny dla wszystkich $x \geqslant 1$ i że tak określona funkcja f jest ciągła na $[1, \infty)$.

3. Znajdź szereg Maclaurina funkcji

$$f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt, \quad x \in R,$$

korzystając m.in. ze znanego rozwinięcia funkcji kosinus. Oblicz pochodną $f^{(101)}(0)$. (Uwaga: proszę nie próbować bezpośrednio obliczać całki $\int \cos(t^2)\, dt$, to się nie uda...).

4. Wyznacz obszar zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n$$

5. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ istnieje ciąg wielomianów P_n taki, że $P_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ oraz $f(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x)$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Weierstrassa. (Prostsza wersja za nieco mniej punktów: tylko warunek $f(x) \leqslant P_n(x)$ zamiast $f(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x)$).