ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1
3 grudnia 2004
Grupa ♣

1. Sprawdź, czy istnieje granica
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2 x}{x^2+y^2}$$
i jeśli tak, to ją oblicz.

2. Znajdź minima i maksima lokalne funkcji $f(x,y) = 2 + 2x^3y - x^2 - 3y^2$.

3. Funkcja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^2 spełnia równanie Laplace'a: $\Delta h(w) = 0$ dla każdego $w \in \mathbb{R}^2$. Sprawdź, że równanie Laplace'a spełnia również funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x,y) = h(3x+y, -x+3y)$. W razie kłopotów rozwiąż zadanie dla $h(x,y) = e^x \cos y$ (za połowę punktów).

4. Znajdź macierz Jacobiego odwzorowania
$$f(x,y,z) = (x^2\cos y,\ x+2z,\ \sin(y^2))$$
w punkcie $(2,\pi,0)$. Czy w pewnym otoczeniu tego punktu funkcja f jest odwracalna?

5. Funkcja $f = f(x,y)$ jest różniczkowalna w otoczeniu pewnego punktu $a \in \mathbb{R}^2$ i spełnia:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) \quad \text{oraz} \quad D_{(-1,2)}f(a) = 3.$$
($D_{(-1,2)}f(a)$ oznacza tu pochodną kierunkową funkcji f w punkcie a wzdłuż wektora $(-1,2)$). Oblicz $\nabla f(a)$.

6. Napisz wzór Taylora funkcji $f(x,y) = e^{y\sin x}$ w otoczeniu punktu $(\frac{\pi}{4}, 0)$ z resztą R_2. Napisz też postać tej reszty, ale już bez obliczania odpowiednich pochodnych. Przypomnienie: w reszcie R_2 występują pochodne <u>trzeciego</u> rzędu.

7. (Bonus) Niech $f(x,y) = (x-y^2)(2x-y^2)$.
   (a) Narysuj poziomicę funkcji f odpowiadającą poziomowi 0. Zaznacz zbiór, na którym f przyjmuje wartości ujemne (dodatnie).
   (b) Czy f ma ekstremum lokalne w punkcie $(0,0)$?
   (c) Czy f ma ekstremum warunkowe w punkcie $(0,0)$ pod warunkiem $Ax + By = 0$, gdzie $(A,B) \neq (0,0)$ dowolnie ustalone?

   Odpowiedzi krótko uzasadnij.

Punktacja: za zadania 1-6 można otrzymać w sumie 100 punktów, za zadanie 7 — 11 punktów.

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1
3 grudnia 2004
Grupa $\diamondsuit$

1. Funkcja $f = f(x, y)$ jest różniczkowalna w otoczeniu pewnego punktu $a \in \mathbb{R}^2$ i spełnia:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 1 \quad \text{oraz} \quad D_{(2,3)}f(a) = -4.$$
($D_{(2,3)}f(a)$ oznacza tu pochodną kierunkową funkcji f w punkcie a wzdłuż wektora $(2, 3)$). Oblicz $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

2. Znajdź najmniejsze i największe wartości funkcji $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2y + xy^2 - x$ na zbiorze $|x| \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^2 spełnia równanie Laplace'a: $\Delta f(w) = 0$ dla każdego $w \in \mathbb{R}^2$. Sprawdź, że równanie Laplace'a spełnia również funkcja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem $h(x, y) = f(x - 2y, 2x + y)$. W razie kłopotów rozwiąż zadanie dla $f(x, y) = e^y \sin x$ (za połowę punktów).

4. Znajdź macierz Jacobiego odwzorowania
$$f(x, y, z) = (e^{yz}, \frac{1}{\sin x}, x + 2y + 3z)$$
w punkcie $(\frac{\pi}{4}, 1, 0)$. Czy w pewnym otoczeniu tego punktu funkcja f jest odwracalna?

5. Sprawdź, czy istnieje granica
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x - y)^4}{x^4 + y^4}$$
i jeśli tak, to ją oblicz.

6. Napisz wzór Taylora funkcji
$$f(x, y, z) = \cos\left(\frac{xe^z}{y}\right)$$
w otoczeniu punktu $(\frac{\pi}{2}, 1, 0)$ z resztą R_1. Napisz też postać tej reszty, ale już bez obliczania odpowiednich pochodnych. Przypomnienie: w reszcie R_1 występują pochodne <u>drugiego</u> rzędu.

7. (Bonus) Niech $f(x, y) = (y + x^2)(2y + x^2)$.
   (a) Narysuj poziomicę funkcji f odpowiadającą poziomowi 0. Zaznacz zbiór, na którym f przyjmuje wartości ujemne (dodatnie).
   (b) Czy f ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0)$?
   (c) Czy f ma ekstremum warunkowe w punkcie $(0, 0)$ pod warunkiem $Ax + By = 0$, gdzie $(A, B) \neq (0, 0)$ dowolnie ustalone?

   Odpowiedzi krótko uzasadnij.

Punktacja: za zadania 1-6 można otrzymać w sumie 100 punktów, a za zadanie 7 — 11 punktów.