ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1

27 stycznia 2005

Grupa ♣

1. Oblicz długość krzywej $\gamma(t) = (e^t, t\sqrt{2}, e^{-t})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Oblicz pole fragmentu helikoidy będącego obrazem odwzorowania $r(s,t) = (s\cos t, s\sin t, t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi$.

3. Korzystając ze wzoru Greena oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą $\gamma(t) = (a\sin t, b\cos^3 t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, a, $b > 0$.

4. Oblicz całkę
$$\int_C ((x+y+1)e^x - e^y)\ dx + (e^x - (x+y+1)e^y)\ dy,$$
gdzie C jest fragmentem łuku okręgu o środku w punkcie $(-4, \frac{1}{2})$ leżącym w I ćwiartce układu współrzędnych i łączącym punkt $(0,0)$ z punktem $(0,1)$.

   Wskazówka: zadanie ma krótkie i nieuciążliwe rachunkowo rozwiązanie …

5. Oblicz pole obszaru
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant xy\right\},$$
gdzie a, $b \neq 0$. Narysuj (schematycznie) ten obszar w przypadku $a = b$.

6. Oblicz całkę niewłaściwą
$$\iiint_D \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz,$$
gdzie $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geqslant 1 \text{ oraz } xy \geqslant 0\}$.

7. (Bonus)
   A. Czy fragment helikoidy z zadania powyżej jest płatem powierzchniowym prostym? Czy jest płatem gładkim?

   B. Sparametryzuj krzywą, którą zakreśla punkt leżący na okręgu o promieniu 1 toczącego się bez poślizgu po wewnętrznej stronie okręgu o promieniu 3. (Można poprosić o objaśniający rysunek).

Punktacja: za zadania 1-4: po 15 punktów, za zadania 5-6: po 20 punktów, za zadanie 7 — 11 punktów.

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium 1
27 stycznia 2005
Grupa $\diamondsuit$

1. Oblicz długość krzywej $\gamma(t) = (t\sin t + \cos t, t\cos t - \sin t, t^3)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

2. Oblicz pole fragmentu helikoidy będącego obrazem odwzorowania $r(s,t) = (t\cos s, t\sin s, s)$ dla $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi$.

3. Korzystając ze wzoru Greena oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą $\gamma(t) = (a\sin^3 t, b\cos t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, a, $b > 0$.

4. Oblicz całkę
$$\int_C ((x-y+1)e^x + e^y)\ dx + (-e^x + (x-y-1)e^y)\ dy,$$
gdzie C jest fragmentem łuku okręgu o środku w punkcie $(\frac{1}{2}, -3)$ leżącym w I ćwiartce układu współrzędnych i łączącym punkt $(0,0)$ z punktem $(1,0)$.

   Wskazówka: zadanie ma krótkie i nieuciążliwe rachunkowo rozwiązanie ...

5. Oblicz pole obszaru
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant xy\right\},$$
gdzie a, $b \neq 0$. Narysuj (schematycznie) ten obszar w przypadku $a = b$.

6. Oblicz całkę niewłaściwą
$$\iiint_D e^{-(x^2+y^2+z^2)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$$
gdzie $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geqslant 1 \text{ oraz } z \geqslant 0\}$.

7. (Bonus)
   A. Czy fragment helikoidy z zadania powyżej jest płatem powierzchniowym prostym? Czy jest płatem gładkim?

   B. Sparametryzuj krzywą, którą zakreśla punkt leżący na okręgu o promieniu 1 toczącego się bez poślizgu po wewnętrznej stronie okręgu o promieniu 3. (Można poprosić o objaśniający rysunek).

Punktacja: za zadania 1-4: po 15 punktów, za zadania 5-6: po 20 punktów, za zadanie 7 — 11 punktów.