ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium poprawkowe wersja I
10 lutego 2005

1. Zamień kolejność całkowania w całce iterowanej $\int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

2. Oblicz objętość bryły, którą z kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$, $a>0$, wycina stożek $x^2+y^2=z^2$.

3. Narysuj krzywą C o parametryzacji

$$C(t)=\begin{cases}(\cos t, -\sin t), & t\in[-\pi,0],\\ (1-t,0), & t\in[0,2].\end{cases}$$

   Następnie oblicz całkę krzywoliniową zorientowaną $\int_C x^2\,dx + xy\,dy$ na dwa sposoby: z definicji oraz z twierdzenia Greena.

4. Σ jest brzegiem obszaru $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, zewnętrzna strona powierzchni Σ jest dodatnia. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną

$$\iint_\Sigma 2xy\,dy\,dz - y^2\,dz\,dx + 2z\,dx\,dy,$$

   na dwa sposoby: z definicji oraz z twierdzenia Gaussa–Ostrogradzkiego.

Punktacja: zadanie 1: 15 punktów, zadanie 2: 25 punktów, zadania 3,4: po 30 punktów.
Na ocenę dst wystarczy 39 punktów, a na dst+ – 70 punktów.
Uwaga: można poprosić o wskazówkę, przypomnienie wzoru, itp., jednak w takim przypadku nie otrzyma się maksymalnej oceny za odpowiednie zadanie (np. na pewno nie dostanie się punktów za podpowiedzianą część rozwiązania).

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium poprawkowe wersja II – część II
10 lutego 2005

1. Zamień kolejność całkowania w całce iterowanej $\int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy$.

2. Oblicz objętość bryły, którą z kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$, $a>0$, wycina stożek $x^2+y^2=z^2$.

3. Narysuj krzywą C o parametryzacji

$$C(t) = \begin{cases} (\cos t, -\sin t), & t \in [-\pi, 0], \\ (1-t, 0), & t \in [0,2]. \end{cases}$$

   Następnie oblicz całkę krzywoliniową zorientowaną $\int_C x^2\, dx + xy\, dy$ na dwa sposoby: z definicji oraz z twierdzenia Greena.

4. Σ jest brzegiem obszaru $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, zewnętrzna strona powierzchni Σ jest dodatnia. Oblicz całkę powierzchniową zorientowaną

$$\iint_\Sigma 2xy\, dy\, dz - y^2\, dz\, dx + 2z\, dx\, dy,$$

   na dwa sposoby: z definicji oraz z twierdzenia Gaussa–Ostrogradzkiego.

Punktacja: zadanie 1: 15 punktów, zadanie 2: 25 punktów, zadania 3,4: po 30 punktów.

Na ocenę dst wystarczy zdobyć co najmniej 35 punktów z każdej części kolokwium oraz co najmniej 100 punktów łącznie.

Uwaga: można poprosić o wskazówkę, przypomnienie wzoru, itp., jednak w takim przypadku nie otrzyma się maksymalnej oceny za odpowiednie zadanie (np. na pewno nie dostanie się punktów za podpowiedzianą część rozwiązania).

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, WPPT (MATEMATYKA)

Kolokwium poprawkowe wersja II – część I
10 lutego 2005

1. Rozstrzygnij, czy istnieje granica
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+2y-1}{2x-y-2}$$
i jeśli tak, to ją oblicz.

2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1; niech $v = (2,-3)$ i $g(x,y) = f(x+y^2, y-x)$. Wyraź $D_v g$ (pochodną kierunkową funkcji g wzdłuż wektora v) poprzez pochodne cząstkowe funkcji f.

3. Co wystarczy założyć o funkcji $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, aby równanie $F(x,y,z) = 0$ definiowało funkcje $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$ oraz $z = z(x,y)$ w otoczeniu każdego punktu $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$? Oblicz, przy odpowiednich założeniach, wartość iloczynu
$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\ .$$
($\frac{\partial x}{\partial y}$ oznacza tu pochodną funkcji $x = x(y,z)$ po zmiennej y, itd.).

4. Dla $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ klasy C^2 uzasadnij wzór
$$\operatorname{div}(f \cdot \nabla g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g.$$

5. Napisz wzór Taylora funkcji $f(x,y,z) = e^{x^2+y} \cos z$ w otoczeniu punktu $(1, -1, \frac{\pi}{2})$ z resztą R_2. Napisz też postać tej reszty, ale już bez obliczania odpowiednich pochodnych. Przypomnienie: w reszcie R_2 występują pochodne <u>trzeciego</u> rzędu.

6. Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = e^{-x}(x^2 - 3x + 1 - y^2)$.

Punktacja: za każde z powyższych zadań jest $\frac{100}{6}$ punktów.

Na ocenę dst wystarczy zdobyć co najmniej 35 punktów z każdej części kolokwium oraz co najmniej 100 punktów łącznie.

Uwaga: można poprosić o wskazówkę, przypomnienie wzoru, itp., jednak w takim przypadku nie otrzyma się maksymalnej oceny za odpowiednie zadanie (np. na pewno nie dostanie się punktów za podpowiedzianą część rozwiązania).