Analiza Matematyczna D3
I kolokwium

1. Niech
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y + y\sin x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 1, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
   (a) Zbadać ciągłość funkcji f.

   (b) Znaleźć wszystkie wektory $a \in \mathbb{R}^2$ wzdłuż których istnieje pochodna kierunkowa $D_a f(0,0)$.

2. Niech $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^2$. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji f (w punktach, w których istnieją), gdy $\|\cdot\|$ oznacza normę (a) euklidesową, (b) taksówkową, (c) maksimum.

   Znaleźć wszystkie punkty, w których funkcja z zadania 2(c) jest różniczkowalna.

3. Znaleźć równanie normalnej w punkcie $(1,1)$ do krzywej danej równaniem uwikłanym
$$ye^x - xe^y + y - x^2 = 0.$$

4. Znaleźć macierz Jacobiego odwzorowania
$$f(x,y,z) = \Big(x^2\operatorname{arctg}(y^2),\, xyz,\, x+y+3z\Big)$$
   w punkcie $(2,1,0)$. Czy w pewnym otoczeniu tego punktu funkcja f jest odwracalna?

5. Funkcja $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie Laplace'a, tzn. $\Delta h(x) = 0$ dla wszystkich x z dziedziny funkcji h. Sprawdzić, że funkcja
$$f(x) = h\Big(\frac{x}{\|x\|^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$
   gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową na $\mathbb{R}^2$, również spełnia równanie Laplace'a.