Analiza Matematyczna D3
II kolokwium

1. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = xy + \frac{x^2}{2} - y^3$.

2. Obliczyć $\iint_D xy\,dx\,dy$, gdzie $D = \{(x,y) : x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

3. Rozstrzygnąć, czy całka krzywoliniowa

$$\int_\Gamma \frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$$

wzdłuż łuku Γ o początku w $(1,2)$ i końcu w $(2,1)$, nie przechodzącym przez oś Oy, zależy od kształtu krzywej całkowania. Następnie obliczyć powyższą całkę, jeśli krzywa Γ jest krótszym z łuków okręgu $x^2 + y^2 = 5$ łączących $(1,2)$ z $(2,1)$.

4. Obliczyć całkę

$$\oint_\Gamma (x + y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy,$$

gdzie Γ jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A = (3,2)$, $B = (2,5)$, $C = (1,1)$, zorientowanym ujemnie.

5. W całce iterowanej

$$\int_{-2}^{2} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz$$

zmienić (na dwa sposoby) kolejność całkowania, aby otrzymać dwie inne całki iterowane. Naszkicować obszar całkowania.

6. * (Zadanie dodatkowe). Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnić wzór

$$\int \dots \int_{D_n(R)} f(x_1 + \ldots + x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^R f(t) t^{n-1}\,dt, \qquad R > 0,$$

gdzie $D_n(R)$ jest zbiorem punktów $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniających $x_1 + \ldots + x_n \leqslant R$ oraz $x_k \geqslant 0$ dla $k = 1, \ldots, n$. Przypomnienie z ćwiczeń: wzór zachodzi dla $f \equiv 1$. (Uwaga: zadanie można rozwiązać na różne sposoby, niektóre są nieuciążliwe rachunkowo…).