ANALIZA MATEMATYCZNA M3 – KOLOKWIUM

1. Sprawdź, czy pole wektorowe
$$F(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}, \; \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2} \right)$$
jest potencjalne na obszarze (a) $D_1 = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$; (b) $D = (0, \infty) \times \mathbf{R}$.
Jeśli tak, to znajdź jego potencjał.

2. Krzywa kawałkami regularna łączy punkty $A = (2,1,1)$ i $B = (1,1,2)$. Oblicz całkę
$$\int_\gamma 2xy^3z^4\,dx + 3y^2(x^2z^4 + z)\,dy + (y^3 + 4x^2y^3z^3)\,dz.$$

3. Oblicz całkę
$$\iint_S 0\,dy\,dz + 0\,dz\,dy + z^2\,dx\,dy$$
po powierzchni $S_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z \geq 0$, przyjmując, że jej górna strona jest dodatnia,
   (a) bezpośrednio,
   (b) z twierdzenia Gaussa–Ostrogradzkiego, dodając do szukanej całki całkę z tego samego pola, ale po (odpowiednio zorientowanej) elipsie $S_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ z = 0$.

4. Wyznacz całkę krzywoliniową zorientowaną
$$\oint_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$
gdzie $\gamma(t) = (1,0,1) + \cos t \cdot (1,0,-1) + \sin t \cdot (0, \sqrt{2}, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, jest okręgiem, (a) wykonując bezpośredni rachunek, (b) korzystając z twierdzenia Stokesa.