Algebra z Geometrią Analityczną
Algebra Liniowa 1

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu oraz określa przybliżony stopień trudności zadań, które pojawią się na kolokwiach i egzaminach. Zadania oznaczone gwiazdką (*) są nieobowiązkowe. Kierujemy je do ambitnych studentów.

Zachęcamy studentów do weryfikowania obliczeń pośrednich w rozwiązywanych zadaniach za pomocą programów komputerowych. W Internecie można znaleźć wiele programów do obliczeń numerycznych i symbolicznych. Programy te można wykorzystać m.in. do rysowania wykresów funkcji, obliczania granic ciągów i funkcji, znajdowania pochodnych, wyznaczania całek nieoznaczonych i oznaczonych, rozwiązywania układów równań algebraicznych i różniczkowych, badań statystycznych itp. Polecamy stronę internetową Wolfram Alpha. Warto korzystać z darmowych programów: Maxima, Microsoft Mathematics, Octave, R, Sage, Scilab, a także programów płatnych: Derive, Mathematica, Matlab, Maple, Scientific WorkPlace. Wiele popularnych kalkulatorów naukowych jest zaprogramowanych do wykonywania obliczeń numerycznych i symbolicznych oraz do prezentowania wykresów funkcji.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

http://www.im.pwr.wroc.pl/kursy-ogolnouczelniane/oceny-celujace.html

Przed kolokwiami i egzaminami zajęć warto zapoznać się z zestawieniem typowych błędów popełnianych przez studentów na sprawdzianach z matematyki.

http://prac.im.pwr.wroc.pl/~skoczylas/typowe_bledy_studentow.pdf

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. dr Zbigniew Skoczylas

Lista zadań

1. Podać przykłady liczb, dla których nie zachodzą podane równości:

(a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; (b) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; (c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y}$;

(d) $\sqrt{x^2} = x$; (e) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{u}{v} = \dfrac{x+u}{y+v}$; (f) $\sin 2x = 2\sin x$;

(h) $|x+y) = |x| + |y|$; (i) $\dfrac{\ln a}{\ln b} = \ln(a-b)$; (j) $a^n \cdot a^m = a^{n\cdot m}$.

2. Za pomocą indukcji matematycznej uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą tożsamości:

(a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$; (b) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

(c) $1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)$; (d) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

3. Korzystając z indukcji matematycznej uzasadnić nierówności:

(a) $2^n > n^2$ dla $n \geqslant 5$; (b) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$;

(c) $n! > 2^n$ dla $n \geqslant 4$; (d) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ dla $x \geqslant -1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ (nierówność Bernoulliego);

(e) $n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ dla $n \geqslant 6$.

4. Metodą indukcji matematycznej pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:
(a) $n^5 - n$ jest podzielna przez 5; (b) $8^n + 6$ jest podzielna przez 7.

5*. Uzasadnić, że n prostych może podzielić płaszczyznę na maksymalnie $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ obszarów. Na ile najwięcej obszarów płaszczyznę można podzielić n okręgami?

6. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:
(a) $(2x+y)^4$; (b) $\left(c - \sqrt{2}\right)^6$; (c) $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^5$; (d) $\left(\sqrt{u} - \sqrt[4]{v}\right)^8$.

7*. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona obliczyć sumy:
(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; (b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$; (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

8. (a) W rozwinięciu wyrażenia $\left(a^3 + \frac{1}{a^2}\right)^{15}$ znaleźć współczynnik przy a^5.
(b) W rozwinięciu wyrażenia $\left(\sqrt[4]{x^5} - \frac{3}{x^3}\right)^7$ znaleźć współczynnik przy $\sqrt[4]{x}$.

---

9. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równań znaleźć ich rozwiązania:
(a) $\overline{z} = (2-i)z$; (b) $z^2 + 4 = 0$; (c) $(1+3i)\,z + (2-5i)\,\overline{z} = 2i - 3$; (d*) $z^3 = 1$.

10. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:
(a) $\operatorname{Re}(z+1) = \operatorname{Im}(2z - 4i)$; (b) $\operatorname{Re}\left(z^2\right) = 0$; (c) $\operatorname{Im}\left(z^2\right) \leqslant 8$; (d) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \operatorname{Im}(iz)$.

11*. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych wyznaczyć i narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:
(a) $|z + 2 - 3i| < 4$; (b) $|z + 5i| \geqslant |3 - 4i|$; (c) $|z - 1| = |1 + 5i - z|$;
(d) $|z + 3i| < |z - 1 - 4i|$; (e) $|iz + 5 - 2i| < |1 + i|$; (f) $|\overline{z} + 2 - 3i| < 5$;
(g) $\left|\frac{z - 3i}{z}\right| > 1$; (h) $\left|\frac{z^2 + 4}{z - 2i}\right| \leqslant 1$; (i) $\left|z^2 + 2iz - 1\right| < 9$.

12. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:
(a) $\arg(z) = \pi$; (b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z - i) \leqslant \frac{\pi}{3}$; (c) $\frac{\pi}{2} < \arg(iz) < \pi$;
(d) $\arg(-z) = \frac{\pi}{4}$; (e) $0 < \arg(\overline{z}) \leqslant \frac{2\pi}{3}$; (f) $\frac{3\pi}{4} \leqslant \arg\left(\frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

13. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:
(a) $(1-i)^{11}$; (b) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$; (c) $\left(2i - \sqrt{12}\right)^9$; (d) $\left(-\sqrt[5]{2} - i\sqrt[5]{2}\right)^{10}$.

14. Wyznaczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej elementy pierwiastków:
(a) $\sqrt[4]{-16}$; (b) $\sqrt[3]{-8i}$; (c) $\sqrt[3]{-2-2i}$; (d) $\sqrt[6]{1}$.

15. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:
(a) $z^2 - 2z + 10 = 0$; (b) $z^2 + 3iz + 4 = 0$; (c) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$;
(d) $z^2 + (1 - 3i)\,z - 2 - i = 0$; (e) $z^6 = (1-i)^{12}$; (f) $(z - i)^4 = (z + 1)^4$.

---

16. Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite wielomianów:
(a) $x^3 + 3x^2 - 4$; (b) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$; (c) $x^4 - x^2 - 2$.

17. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:
(a) $6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$; (b) $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$; (c) $6x^4 + 7x^2 + 2$.

18. Wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste lub zespolone wraz z krotnościami wielomianów:
(a) $(x-1)(x+2)^3$; (b) $(2x+6)^2(1-4x)^5$; (c) $\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)^3\left(z^2+9\right)^4$.

19. Nie wykonując dzieleń wyznaczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli:
(a) $P(x) = x^8 + 3x^5 + x^2 + 4$, $Q(x) = x^2 - 1$;
(b) $P(x) = x^{2007} + 3x + 2008$, $Q(x) = x^2 + 1$;
(c) $P(x) = x^{99} - 2x^{98} + 4x^{97}$, $Q(x) = x^4 - 16$;
(d*) $P(x) = x^{2006} + x^{1002} - 1$, $Q(x) = x^4 + 1$;
(e*) $P(x) = x^{444} + x^{111} + x - 1, Q(x) = \left(x^2+1\right)^2$.

20. Pokazać, że jeżeli liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego P, to liczba $\overline{z_1}$ także jest pierwiastkiem wielomianu P. Korzystając z tego faktu znaleźć pozostałe pierwiastki zespolone wielomianu $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 15$ wiedząc, że jednym z nich jest $x_1 = 1 + 2i$.

21. Podane wielomiany rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste:
(a) $x^3 - 27$; (b) $x^4 + 16$; (c) $x^4 + x^2 + 4$; (d*) $x^6 + 1$.

22. Podane funkcje wymierne rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:
(a) $\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$; (b) $\dfrac{x+9}{x(x+3)^2}$; (c) $\dfrac{3x^2+4x+3}{x^3-x^2+4x-4}$; (d) $\dfrac{x^3-2x^2-7x+6}{x^4+10x^2+9}$.

---

23. Niech $\boldsymbol{a} = (1, -1, -2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (5, 4, 2, 0)$ będą wektorami z przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$. Wyznaczyć wektory $\boldsymbol{x}$ oraz $\boldsymbol{y}$, jeżeli:
(a) $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{x}$; (c) $\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}, \\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}. \end{cases}$

24. Obliczyć:
(a) Odległość punktów $A = (1, 2, 3, 0, 0)$, $B = (0, 1, 2, 3, 4)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^5$;
(b) Obliczyć kąt między wektorami $\boldsymbol{a} = (-1, 0, 2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (0, -2, 1, -2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

25. Dla jakich wartości parametru p, wektory $\boldsymbol{a} = (p, 1, p, 1)$,$\boldsymbol{b} = (p, p, -1, -9)$ są prostopadłe w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

26*. Jaki zbiór w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ tworzą końce wersorów, które są prostopadłe do wektorów: $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, 0, 1, 1)$?

---

27. Trójkąt jest rozpięty na wektorach $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Wyrazić środkowe trójkąta przez wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

28*. Za pomocą rachunku wektorowego pokazać, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

29. Równoległobok jest rozpięty na wektorach $\boldsymbol{a} = (-3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2)$. Wyznaczyć kąt ostry między przekątnymi równoległoboku.

30. Długości wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ wynoszą odpowiednio $3, 5$. Znamy iloczyn skalarny $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = -2$. Obliczyć

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \circ (2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}).$$

31. Wyznaczyć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 3)$ i tworzy kąt 120^o z dodatnią częścią osi Ox.

32. Napisać wszystkie postacie równania prostej (normalne, kierunkowe, parametryczne) przechodzącej przez punkty $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (-3, 7)$.

33. Znaleźć punkty przecięcia prostej

$$l : \begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -6 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$

z osiami układu współrzędnych. Czy punkt $P = (4, 7)$ należy do prostej l?

34. Znaleźć punkt przecięcia prostych:

$$k : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}, \quad l : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

35. Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$ i jest
(a) równoległa do prostej $3x - y + 2 = 0$; (b) prostopadła do prostej $x + y = 0$.

36. Dla jakiej wartości parametru m, odległość punktów $P = (1, 0)$ i $Q = (m + 3, -2)$ jest równa 4?

37. Wyznaczyć odległość punktu $P_0 = (-4, 1)$ od prostej l o równaniu $3x + 4y + 12 = 0$.

38. Znaleźć odległość prostych równoległych l_1, l_2 o równaniach odpowiednio $x - 2y = 0$, $-3x + 6y - 15 = 0$.

39. Obliczyć wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (-1, 3)$, $C = (2, 5)$ opuszczoną z wierzchołka C.

40*. Znaleźć równania dwusiecznych kątów wyznaczonych przez proste o równaniach $3x + 4y - 2 = 0$, $4x - 3y + 5 = 0$.

---

41. (a) Dla jakich wartości parametrów p, q wektory $\boldsymbol{a} = (1 - p, 3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 4 - q, 2)$ są równoległe?
(b) Dla jakich wartości parametru s wektory $\boldsymbol{p} = (s, 2, 1 - s)$, $\boldsymbol{q} = (s, 1, -2)$ są prostopadłe?

42. Znaleźć wersor, który jest prostopadły do wektorów$\boldsymbol{u} = (-1, 3, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1, 1)$.

43. Wyznaczyć cosinus kąta między wektorami $\boldsymbol{p} = (0, 3, 4)$, $\boldsymbol{q} = (2, 1, -2)$.

44. (a) Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 5)$, $\boldsymbol{v} = (0, 3, 2)$.
(b) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0, 1)$, $B = (3, 0, 0)$, $C = (0, -5, 0)$.
(c) Obliczyć wysokość trójkąta

45. (a) Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (0, 4, 1)$, $\boldsymbol{c} = (-1, 0, 2)$.
(b) Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach: $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 4, 1)$, $D = (2, 2, 2)$.
(c) Obliczyć wysokość czworościanu.

46. Znaleźć równania normalne i parametryczne płaszczyzny:
(a) przechodzącej przez punkty $P = (1, -1, 0)$, $Q = (2, 3, 7)$, $R = (4, 0, 1)$;
(b) przechodzącej przez punkt $A = (-2, 5, 4)$ oraz przez oś Oz;
(c) przechodzącej przez punkt $A = (-2, 5, 4)$ oraz prostopadłej do osi Oy.

47. (a) Płaszczyznę $\pi : 2x + y - z - 7 = 0$ zapisać w postaci parametrycznej.

(b) Płaszczyznę $\pi : \begin{cases} x = s + t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = 3 + 3s - t \end{cases}$ przekształcić do postaci normalnej.

48. Znaleźć równanie parametryczne i krawędziowe prostej:
(a) przechodzącej przez punkty $A = (-3, 4, 1)$, $B = (0, 2, 1)$;
(b) przechodzącej przez punkt $P = (3, -1, 2)$ i przecinającej prostopadle oś Oy.

49. (a) Prostą $l : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ zapisać w postaci parametrycznej.
(b) Prostą $l : x = 3,\ y = 2 - 2t,\ z = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ zapisać w postaci krawędziowej.

50. Wyznaczyć punkt przecięcia:
(a) prostej $l : x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -3 + 2t$ oraz płaszczyzny $\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0$;
(b) płaszczyzn $\pi_1 : x + 2y - z - 5 = 0,\ \pi_2 : x + 2y + 2 = 0,\ \pi_3 : x + y + z = 0$;
(c) prostych $l_1 : x = 1 - t,\ y = 1,\ z = -3 + 2t,\ l_2 : x = s,\ y = 3 - 2s,\ z = 2 - 5s$.

51. Obliczyć odległość:
(a) punktu $P = (0, 1, -2)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 4y + 12z - 1 = 0$;
(b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : x - 2y + 2z - 3 = 0,\ \pi_2 : -2x + 4y - 4z + 18 = 0$;
(c) punktu $P = (2, -5, 1)$ od prostej $l : x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -3 + 2t$;
(d) prostych równoległych $l_1 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$, $l_2 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$;
(e) prostych skośnych $l_1 : x = 1 - t,\ y = 1,\ z = -3 + 2t,\ l_2 : x = s,\ y = 3 - 2s,\ z = 1 - 5s$.

52. Wyznaczyć rzut prostopadły punktu $P = (1, -2, 0)$ na:
(a) płaszczyznę $\pi : x + y + 3z - 5 = 0$;
(b) prostą $l : x = 1 - t,\ y = 2t,\ z = 3t$.

53. Obliczyć kąt między:
(a) płaszczyznami $\pi_1 : x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : -2x + y - z + 5 = 0$;
(b) prostą $l : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ i płaszczyzną $\pi : x + y = 0$;
(c) prostymi $l_1 : x = -t,\ y = 1 + 2t,\ z = -3,\ \ l_2 : x = 0,\ y = -2s,\ z = 2 + s$.

---

54. We wskazanej przestrzeni zbadać liniową niezależność układów wektorów:
(a) $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 4)$;
(b) $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3, 2, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 1)$;
(c) $\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{c}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{c}_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{c}_3 = (1, -1, 1, 0)$, $\boldsymbol{c}_4 = (-1, 1, -1, 1)$;
(d) $\mathbb{R}^5$, $\boldsymbol{d}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\boldsymbol{d}_2 = (5, 4, 3, 2, 1)$, $\boldsymbol{d}_3 = (1, 0, 1, 0, 1)$.

55. (a) Pokazać, że jeżeli wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$, to wektory $2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$ także są liniowo niezależne. Czy wektory $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ są liniowo niezależne?

(b) Wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo zależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Czy wektory $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$ także są liniowo zależne?

(c) Wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ są także liniowo niezależne.

56. Zbadać, czy podane układy wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:
(a) $\{(1,2,0),(-1,0,3),(0,-2,-3)\}$, $\mathbb{R}^3$;
(b) $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;
(c) $\{(1,-1,0,2),(1,0,3,0),(0,1,3,0),(0,0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^4$.

57. Podane układy wektorów uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni:
(a) $\{(1,2,0),(2,0,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;
(b) $\{(1,2,3,4),(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$, $\mathbb{R}^4$;
(c) $\{(0,1,0,2),(4,1,1,3)\}$, $\mathbb{R}^4$.

58. Pokazać, że jeżeli wektory $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$, to wektory

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_4,\ \boldsymbol{u}_4=\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4$$

także tworzą bazę tej przestrzeni.

59. Znaleźć bazy i wymiary podprzestrzeni:
(a) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+2y-z=0\right\}$;
(b) $B=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=2y=-t\right\}$;
(c) $C=\left\{(u,v,x,y,z)\in\mathbb{R}^5 : u+v=0,\ x+y+x=0\right\}$.

60. Wyznaczyć współrzędne wektorów we wskazanych bazach:
(a) $\boldsymbol{b}=(1,2,3)$, $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}\subset\mathbb{R}^3$;
(b) $\boldsymbol{c}=(1,0,2,0)$, $\mathcal{B}=\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,0,1,0),(1,2,3,4)\}\subset\mathbb{R}^4$.

61. Zbadać, czy podane przekształcenia są liniowe:
(a) $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x_{1,}x_2)=x_1-3x_2$;
(b) $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=(-x,5x+y,y-2z)$;
(c) $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^4$, $F(x)=(0,x^2,0,-3x)$;
(d) $F:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1x_2,\ x_3x_4)$.

62. Znaleźć macierze przekształceń liniowych $F:\mathbb{R}^n,\longrightarrow\mathbb{R}^m$ we wskazanych bazach $\mathcal{B}'$ oraz $\mathcal{B}''$ odpowiednio przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{R}^m$:
(a) $F(x,y)=(x,y,x-y)$, $\mathcal{B}'=\{(1,0),(1,1)\}$, $\mathcal{B}''=\{(1,0,0),(0,-1,0),(-1,1,-1)\}$;
(b) $F(x,y)=(y,0,x,0)$, $\mathcal{B}'=\{(1,-1),(0,2)\}$, $\mathcal{B}''=\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$;
(c) $F(x,y,z)=x+y-3z$, $\mathcal{B}'=\{(1,0,2),(0,-1,1),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B}''$ – standardowa;
(d) $F(x,y,z,t)=(x+y+z+t,y-t,z-x)$, $\mathcal{B}'$ – standardowa, $\mathcal{B}''$ – standardowa.

63. (a) Uzasadnić, że obrót na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wokół początku układu współrzędnych o kat φ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tego obrotu w bazach standardowych.

(b) Pokazać, że symetria względem osi Oz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tej symetrii w bazach standardowych.

64. Dla par macierzy A, B wykonać (jeśli to jest możliwe) działania $3A - \frac{1}{2}B$, A^T, AB, BA, A^2:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

65. Rozwiązać równanie macierzowe $3\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - X\right) = X + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

66. Znaleźć niewiadome x, y, z spełniające równanie $2\begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{bmatrix}^T$.

67. Podać przykłady macierzy kwadratowych A, B, które spełniają podane warunki:
(a) $AB \neq BA$; (b) $AB = \mathbf{0}$, ale $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$; (c) $A^2 = \mathbf{0}$, ale $A \neq \mathbf{0}$.

68*. Uzasadnić, że iloczyn:
(a) macierzy diagonalnych tego samego stopnia jest macierzą diagonalną;
(b) iloczyn macierzy trójkątnych dolnych tego samego stopnia jest macierzą trójkątną dolną.

69*. Pokazać, że każdą macierz kwadratową można przedstawić jednoznacznie jako sumę macierzy symetrycznej $\left(A^T = A\right)$ i antysymetrycznej $\left(A^T = -A\right)$. Napisać to przedstawienie dla macierzy

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

70. Napisać rozwinięcia Laplace'a wyznaczników według wskazanych kolumn lub wierszy (nie obliczać wyznaczników w otrzymanych rozwinięciach):

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & \mathbf{3} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$ – trzecia kolumna; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$ – czwarty wiersz.

71. Obliczyć wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

72. Korzystając z własności wyznaczników uzasadnić, że podane macierze są osobliwe:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

73. (a) Wiadomo, że $\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & 0 \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = -24$. Obliczyć $\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$.

(b) Wiadomo, że $\det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & 0 \\ 5 & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{t} & 0 \\ 7 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = 18$. Obliczyć $\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix}$.

74. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy kwadratowej A stopnia n spełniającej podane warunki:
(a) $A^3 = 4A$ dla $n = 3, 4$; (b) $A^T = -A^2$ dla $n = 3, 4$?

75. Obliczyć $\det(2A)$, jeżeli $\det(3A) = 54$ i $\det(4A) = 128$.

76*. Obliczyć wyznaczniki macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & 0 & \ldots & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{5} \end{bmatrix}_{n\times n}$.

---

77. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej wyznaczyć macierze odwrotne do:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$..

78. Korzystając z metody dołączonej macierzy jednostkowej znaleźć macierze odwrotne do:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

79. Wiadomo, że $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć A.

80. Wiadomo, że $\det(A) = 4$ oraz $\det(B) = -3$. Obliczyć:
(a) $\det\left[A \cdot (6B)^{-1}\right]$; (b) $\det\left[A^{-1} \cdot B^3 \cdot A^2\right]$.

81. Znaleźć rozwiązania równań macierzowych:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$;

(c) $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$;

(e) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

82. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć wskazaną niewiadomą z układów równań liniowych:

(a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ – niewiadoma y; (b) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$ – niewiadoma x;

(c) $\begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$ – niewiadoma z.

83. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 3x - 2y - 5z + t = 3 \\ 2x - 3y + z + 5t = -3 \\ x + 2y - 4t = -3 \\ x - y - 4z + 9t = 22 \end{cases}$.

84. (a) Znaleźć trójmian kwadratowy, który przechodzi przez punkty $(-1,2)\,,(0,-1)\,,(2,4)$.

(b) Wyznaczyć współczynniki a,b,c funkcji $y = a2^x + b3^x + c4^x$, która w punktach $-1,0,1$ przyjmuje odpowiednio wartości $\frac{3}{4},1,1$.

(c) Funkcja $y\,(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$ spełnia równanie różniczkowe $y'' - 6y' + 13y = 25\sin 2x$. Wyznaczyć współczynniki A, B.

85. (a) Dla jakich wartości parametru m, podany układ jednorodny ma niezerowe rozwiązanie

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ 2x - y + mz = 0 \\ mx + y + 4z = 0 \end{cases} ?$$

(b) Dla jakich wartości parametrów a,b,c,d, podany układ równań liniowych jest sprzeczny

$$\begin{cases} x + y = a \\ z + t = b \\ x + z = c \\ y + t = d \end{cases} ?$$

(c) Znaleźć wszystkie wartości parametru p, dla których podany układ równań liniowych ma tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - py + z = 3 \\ 2x + y - pz = 5 \end{cases}.$$

86. (a*) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 7 \\ \frac{1}{x} - \frac{8}{y} - \frac{3}{z} = -4 \end{cases}$.

(b*) Znaleźć dodatnie rozwiązania układu równań $\begin{cases} xy^2z^3 = 2 \\ x^2y^3z^4 = 4 \\ x^2yz = 2 \end{cases}$.

---

87. Wyznaczyć rzędy macierzy (wskazać niezerowy minor najwyższego stopnia):

88. Korzystając z interpretacji geometrycznej przekształceń liniowych znaleźć ich jądra, obrazy i rzędy:

(a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, obrót o kąt $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ wokół początku układu;

(b) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, rzut prostokątny na prostą $x + y = 0$;

(c) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, symetria względem płaszczyzny $y = z$;

(d) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, obrót wokół osi Oy o kąt $\dfrac{\pi}{2}$.

89. Wyznaczyć jądra, obrazy oraz rzędy przekształceń liniowych:

(a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$;

(b) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$;

(c) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$; (c) $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $F(x) = (0, x, 0, -x)$.

---

90. Korzystając z definicji wyznaczyć wektory i wartości własne przekształceń liniowych:

(a) symetria względem osi Ox w przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

(b) obrót w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wokół osi Oy o kąt $\dfrac{\pi}{6}$;

(c) symetria w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem płaszczyzny xOz;

(d) rzut prostokątny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na oś Oz.

91. Znaleźć wartości i wektory własne przeształceń liniowych:

(a) $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$;

(b) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$;

(c) $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $F(x, y, z, t) = (0, x, 0, -x)$.

---

92. Napisać równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A = (-1, 3)$, $B = (5, 7)$.

93. Wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 2 = 0$.

94. Znaleźć równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (0, 6)$.

95. Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty $P = (3, 4)$, $Q = (5, 2)$ i ma środek na osi Ox.

96*. Wyznaczyć równanie okręgu, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych oraz przechodzi przez punkt $A = (5, 8)$. Ile rozwiązań ma zadanie?

97. Znaleźć równanie stycznej okręgu $x^2 + y^2 = 25$:

(a) w punkcie $(-3, 4)$; (b) przechodzącej przez punkt $(-5, 10)$;

(c) równoległej do prostej $x - y - 4 = 0$; (d) prostopadłej do prostej $x + 2y = 0$.

98. Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz mimośród elipsy $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

99. Punkty $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$ są ogniskami elipsy. Znaleźć równanie tej elipsy, jeżeli widomo, że jednym z jej wierzchołków jest punkt $W = (0, -3)$

100. Naszkicować elipsę o równaniu $4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 4 = 0$.

101. Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz równania asymptot hiperboli $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

102. Narysować hiperbolę wraz z asymptotami:

(a) $\frac{(y+5)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$; (b) $4x^2 - 25y^2 + 8x = 0$.

103. Wyznaczyć współrzędne ogniska, wierzchołka oraz podać równanie kierownicy paraboli o równaniu:

(a) $y^2 = 12x$; (b) $y = x^2 + 6x$.

104. Napisać równanie paraboli, której:

(a) kierownicą jest prosta $y = -2$, a punkt $W = (-1, 6)$ - wierzchołkiem;

(b) kierownicą jest prosta $x = 1$, a punkt $W = (5, 1)$ - wierzchołkiem.

105. Jakie krzywe przedstawiają równania:

(a) $x^2 - y^2 + 4 = 0$; (b) $(x - y)^2 = 1$; (c) $x^2 + y^2 = 2xy$?