WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 1

1. Niech $T(n)$, $n \in \mathbb{N}$, oznacza zdanie $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$. Pokazać, że $T(n) \Longrightarrow T(n+1)$. Czy zdanie $T(n)$ jest prawdziwe?

2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwe są zależności:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$;
c) $1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \dfrac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$, $q \neq 1$;
d) dwumian Newtona: $\quad (x+y)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$ dla $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
e) $\quad x^n - y^n = (x-y) \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} y^j$ dla $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
f) nierówność Bernoulliego: $\quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad$ dla $x \geqslant -1$. W jakich przypadkach nierówność ta jest ostra?

3. Obliczyć następujące sumy:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$; **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$; **d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; **e)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}$;
f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-n}$; **g)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

4. Wykazać, że wartość bezwzględna liczby rzeczywistej ma następujące własności:

a) $|x| = |-x|$; **b)** $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$; **c)** $|x| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$, $(\alpha \geqslant 0)$; **d)** $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;
e) $|x| - |y| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$; **f)** $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$; **g)** $|xy| = |x||y|$; **h)** $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, $(y \neq 0)$.

5. Uzasadnić, że

a) $\displaystyle\Big|\sum_{j=1}^{m} x_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \big|x_j\big|$, dla dowolnych $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$;
b) $|x^n - y^n| \leqslant n\alpha^{n-1}|x-y|$ oraz $|x^n - y^n| \leqslant 2n\alpha^n$, gdzie $\alpha = \max\{|x|, |y|\}$.

6. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, rozwiązać nierówności:

a) $|3x - 6| \geqslant 9$; **b)** $|x-4| \leqslant |x+1|$; **c)** $|x-2| + |x+2| < t$ dla $t \in \{3, 5\}$; **d)** $|x-1| \geqslant |3+x|$.

7. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość $\min\{x, y\} = \dfrac{x + y - |x-y|}{2}$. Znaleźć podobny wzór na $\max\{x, y\}$.

8. Dla funkcji $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ wyznaczyć: $f(x^2)$, $f(\frac{1}{x})$, $(f \circ f)(x)$.

9. W oparciu o definicję pokazać, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ jest malejąca na $(-\infty, -1)$ i na $(1, \infty)$. Czy f jest malejąca na $(-\infty, -1]$?

10. Pokazać, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R}$.

11. Pokazać, że funkcje $f(x) = \dfrac{x}{|x| + \sqrt{1+x^2}}$ i $g(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$ są nieparzyste.

12. Niech $x_1, x_2 \geqslant 0$. Pokazać, że $\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.
Następnie pokazać, że średnia geometryczna liczb $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$ nie jest większa od średniej arytmetytcznej tych liczb tzn. $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

13. Niech teraz $x_1, x_2 > 0$. Pokazać, że $\dfrac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leqslant \sqrt{x_1 x_2}$.
Podobnie, dla $x_1, \ldots, x_n > 0$ mamy $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ (średnia harmoniczna liczb $x_1, \ldots, x_n > 0$ nie przewyższa średniej geometrycznej).