WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 10

119. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na odcinku $[a,b]$ takim, że $ab > 0$. Pokazać, że istnieje liczba $c \in (a,b)$, dla której mamy

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c).$$

120. Wyznaczyć ekstrema funkcji

a) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; b) $g(x) = |x|e^{-|x-1|}$; c) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

121. Wyznaczyć kresy funkcji w podanych zbiorach

a) $f(x) = (2+2x+x^2)e^{-x}$ w $[0,\infty)$; b) $g(x) = \operatorname{arc\,tg}(x + \frac{1}{x})$ w $(0,\infty)$.

122. Podać przykład funkcji parzystej f takiej, że $f'(0) = 0$ i f nie ma ekstremum w $x_0 = 0$.

123. Obliczyć granice:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}[\ln x \cdot \ln(1-x)]$; d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right]^x$; f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$; g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

124. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{arc\,tg} x}$; b) $g(x) = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

125. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a,b). Pokazać, że f jest wypukła na (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x_0 \in (a,b)$ wykres funkcji f leży nad styczną przechodzącą przez punkt $(x_0, f(x_0))$ lub na tej stycznej.

126. Udowodnić następujące nierówności:

a) $\left(\dfrac{x+5y+2z}{8}\right)^5 \leqslant \dfrac{x^5+5y^5+2z^5}{8}$ dla $x,y,z \in [0,\infty)$;

b) $x\ln x + y\ln y + z\ln z \geqslant (x+y+z)\ln\dfrac{x+y+z}{3}$ dla $x,y,z \in (0,\infty)$.

127. Ruch mrówki na płaszczyźnie $x0y$ opisują funkcje $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Na płaszczyźnie $x0y$ narysować krzywą, po której porusza się mrówka i zaznaczyć kierunek jej ruchu:

a) $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = \cos^2 t$, $t \in [0,\pi/4]$; b) $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [\pi/2, 2\pi]$;

c) $x(t) = \cos t$, $y(t) = \cos 2t$, $t \in [0,\pi]$.

128. Napisać równanie stycznej do krzywej $x(t) = \dfrac{t}{1-t}$, $y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ w każdym punkcie tej krzywej, którego rzędna wynosi $1/5$.

129. Wyznaczyć (jeśli istnieją) asymptoty krzywej zadanej równaniami $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$.

130. Na płaszczyźnie $x0y$ wykreślić krzywą o równaniach parametrycznych $x(t) = t^2 - 3$, $y(t) = t^3 - 3t$.

131. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i wypukłości funkcji $y = y(x)$ określonych równaniami $x(t) = 2t + 2e^{-t}$, $y(t) = t + \frac{1}{2}e^{-2t}$.