

## WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 11

132. Wyznaczyć funkcję pierwotną  $F$  funkcji  $f$ , spełniającą warunek  $F(0) = 1$ , w następujących dwóch przypadkach:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x + |x|}{2}, \text{ na } \mathbb{R}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{gd}y \quad x \in (-\infty, 0) \\ 1 - x, & \text{gd}y \quad x \in [0, 1] \\ (1 - x)^3, & \text{gd}y \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$

133. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

posiada funkcję pierwotną na  $\mathbb{R}$  chociaż nie jest ciągła w  $x = 0$ .

134. Całkując przez części wyznaczyć następujące całki nieoznaczone:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sqrt{x} \ln x dx; \quad \text{b) } \int \arctg \sqrt{x} dx; \quad \text{c) } \int x \arctg \sqrt{x} dx; \quad \text{d) } \int \frac{x dx}{\sin^2 x}; \quad \text{e) } \int \cos(\ln x) dx; \\ \text{f) } \int x^2 e^x \sin x dx; \quad \text{g) } \int x \operatorname{tg}^2 x dx; \quad \text{h) } \int x \ln(1 + x^2) dx; \quad \text{i) } \int \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx. \end{aligned}$$

135. Wykorzystując odpowiednie podstawienia wyznaczyć następujące całki nieoznaczone:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^2 \sqrt[3]{2 + x} dx; \quad \text{b) } \int x^2 \sqrt[3]{2 + x^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt{x}} dx; \quad \text{d) } \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx; \\ \text{e) } \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad \text{f) } \int x \cos(\ln x) dx; \quad \text{g) } \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx; \quad \text{h) } \int \sqrt{1 - 4x - x^2} dx. \end{aligned}$$

136. Wyprowadzić wzory rekurencyjne dla całek:

$$\text{a) } \int \frac{1}{\sin^n x} dx; \quad \text{b) } \int x^n \ln x dx; \quad \text{c) } \int x^\alpha (\ln x)^n dx, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1.$$

137. Wyliczyć całki :

$$\text{a) } \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}; \quad \text{c) } \int \frac{(-x^3 + 2x) dx}{(x^2 + 4)(x + 1)^2}.$$

138. Wyznaczyć całki nieoznaczone następujących funkcji trygonometrycznych:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx; \quad \int \frac{dx}{1 + 4 \cos x}; \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}; \quad \int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx; \quad \int \cos x \cos 5x dx.$$

139. Obliczyć całki :

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 3x + 1}}; \quad \text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}.$$

140. Obliczyć całkę  $\int \frac{x^3 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} dx$ .