WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 2

14. W oparciu o aksjomaty pokazać, że :

a) $0 < 1$;

b) $a < b \Longrightarrow -b < -a$;

c) $0 < a \Longrightarrow 0 < \frac{1}{a}$;

d) $0 < a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$;

e) $0 < a < 1 \Longrightarrow a^n < a$ dla $n > 1$;

f) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

g) $a \leqslant b$ i $c < 0 \Longrightarrow ac \geqslant bc$;

h) $0 < a \leqslant b$ i $0 < c \leqslant d \Longrightarrow ac \leqslant bd$.

15. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, $0 < a < b$, istnieje liczba $\xi > 1$ taka, że $a\xi < b$.

16. a) Wykazać, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ są niewymierne.

b) Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są wymierne. Czy liczby a, b, c muszą być wymierne?

17. a) Wykazać, że zbiór liczb niewymiernych jest gęsty w $\mathbb{R}$.

b) Czy zbiór $D = \{x : x = \omega\sqrt{2}, \quad \omega \in \mathbb{Q}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$?

c) Czy gęsty w $\mathbb{R}$ jest zbiór $E = \{x : x = \frac{n-m}{n+m}, \quad n, m \in \mathbb{N}\}$?

18. Niech $A \neq \emptyset$ i niech $-A$ będzie zbiorem liczb postaci $-a$, gdzie $a \in A$. Udowodnić, że

$$\sup A = -\inf(-A) \qquad \text{oraz} \qquad \inf A = -\sup(-A).$$

19. Dowieść, że każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $S \subset \mathbb{R}$ posiada kres dolny $\inf A \in \mathbb{R}$.

20. Niech dane będą następujące zbiory:

a) $A = \{x : x = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, \quad n, m \in \mathbb{N}\}$;

b) $B = \{x : x = \frac{n-m}{m}, \quad n, m \in \mathbb{N}\}$;

c) $C = \{x : x = \frac{p-q}{p+q}, \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)\}$.

Które z tych zbiorów są ograniczone z góry, są ograniczone z dołu, są ograniczone? Które mają element największy, najmniejszy? Wyznaczyć kresy tych zbiorów.

21. Niech A i B będą niepustymi i ograniczonymi pozbiorami $\mathbb{R}$. Zdefiniujmy zbiory

$$A + B = \{z : z = a + b, \quad a \in A,\ b \in B\} \qquad \text{i} \qquad A \cdot B = \{z : z = a \cdot b, \quad a \in A,\ b \in B\},$$

$$A - B = \{z : z = a - b, \quad a \in A,\ b \in B\}.$$

Czy prawdziwe są następujące równości?

a) $\max(A + B) = \max A + \max B$;

b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

c) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$;

Znaleźć związki między liczbami $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$, $\sup B$, $\inf(A - B)$, $\sup(A - B)$. Uzasadnić odpowiedzi.

22. Zbiory A i B zawarte w $\mathbb{R}$ mają następującą własność: dla każdego $y \in B$ istnieje $x \in A$ taki, że $y < x$ oraz dla każdego $x \in A$ istnieje $y \in B$, że $x < y$. Wiadomo, że $\alpha = \sup A$. Znaleźć $\sup B$. Czy α musi być największym elementem w A? Uzasadnić odpowiedź.

23. Czy dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $[x + y] = [x] + [y]$? Czy równość ta jest prawdziwa gdy $y \in \mathbb{Z}$, gdy $y \in \mathbb{N}$?