WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 3

24. Funkcje $\rho_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ i $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ są metrykami w X. Czy metrykami w X są funkcje:

a) $\rho(x,y) = \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y)$;

b) $h(x,y) = \max\{\rho_1(x,y), \rho_2(x,y)\}$;

c) $g(x,y) = \min\{\rho_1(x,y), \rho_2(x,y)\}$;

d) $d(x,y) = \sqrt{\rho_1^2(x,y) + \rho_2^2(x,y)}$.

25. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma następujące własności:
(i) $f(0) = 0$,
(ii) $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$,
(iii) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.
Czy funkcja $\rho(x,y) = f(x-y) + f(y-x)$ jest metryką na $\mathbb{R}$?

26. Każde dwa punkty A i B leżące na okręgu o obwodzie p dzielą ten okrąg na dwa łuki długości x i $p-x$. Czy funkcja $\rho(A,B) = x(p-x)$ jest metryką na tym okręgu?

27. Pokazać, że kula otwarta $K(p,r) = \{x \in X : \rho(p,x) < r\}$, $r > 0$, jest zbiorem otwartym w przestrzeni (X,ρ). Czy kula domknięta $\overline{K}(p,r) = \{x \in X : \rho(p,x) \leqslant r\}$ jest zbiorem domkniętym w (X,ρ)? Czy może być zbiorem otwartym?

28. W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, \rho)$, gdzie ρ jest metryką taksówkową, narysować kule $K\big((0,1),1\big)$ i $K\big((0,1),2\big)$.

29. W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, r)$, gdzie r jest metryką "rzeka", narysować kule $K\big((-2,-1),1\big)$ i $K\big((-2,-1),3\big)$.

30. Czy zbiór jednoelementowy jest zbiorem domkniętym w każdej metryce? Czy w pewnych metrykach może być zbiorem otwartym?

31. Zbiór A jest otwarty, a zbiór B jest domknięty w (X,ρ). Co można powiedzieć o zbiorach: $A \setminus B$, $B \setminus A$ i $A \cap B$?

32. Pokazać, że jeśli zbiory A i B są ograniczone w przestrzeni metrycznej (X,ρ), to zbiór $A \cup B$ jest też ograniczony w tej przestrzeni.

33. Wykazać, że w przestrzeni metrycznej dyskretnej ciąg (x_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest stały od pewnego miejsca.

34. Pokazać, że ciąg (P_n), gdzie $P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, jest zbieżny w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową (taksówkową), wtedy i tylko wtedy, gdy oba ciągi (x_n) i (y_n) są zbieżne w $\mathbb{R}$ z metryką $d(t,s) = |t-s|$, $t, s \in \mathbb{R}$.

35. Ciągi (x_n) i (y_n) są zbieżne w (X,ρ). Rozpatrzmy ciąg (z_n), którego kolejnymi wyrazami są $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$.
a) Zapisać ogólny wyraz tego ciągu;
b) Kiedy (z_n) jest zbieżny w (X,ρ)?