WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 4

36. Pokazać, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$.

37. Dla ciągów (x_n) i (y_n) mamy $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Czy co najmniej jeden z tych ciągów musi być ograniczony?

38. Niech (a_n) będzie ciągiem spełniającym warunek $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$. Czy musi być $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$? Czy musi być $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$?

39. Niech $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Czy ciąg (x_n) musi być zbieżny?

40. Wykazać, że jeżeli podciągi (a_{2n}) oraz (a_{2n+1}) są zbieżne do tej samej granicy g, to $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

41. Podciągi (a_{2n}), (a_{3n}) oraz (a_{3n+1}) są zbieżne do tej samej granicy. Czy ciąg (a_n) jest zbieżny?

42. Sprawdzić, czy następujące ciągi spełniają warunek Cauchy'ego:

$$\alpha_n = \frac{\cos x}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2x}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos nx}{n\cdot(n+1)} \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad \beta_n = \frac{1}{\log_2 2} + \frac{1}{\log_2 3} + \ldots + \frac{1}{\log_2 n}.$$

43. Wyrazy ciągów (a_n) i (b_n) spełniają, dla każdego $n\in\mathbb{N}$, nierówności

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{i} \qquad |b_{n+1} - b_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Czy ciągi te są zbieżne?

44. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznaczyć granice ciągów:

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^6+1^2}} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{n^6+2^2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6+n^2}}$; b) $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

c) $c_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$ (Wsk. Pokazać, że $c_n^2 \leqslant \frac{1}{2n+1}$);

d) $d_n = \sqrt{2^{-n}+3^{-n}}$; e) $e_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}$.

45. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$, $g<1$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

46. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = g$, $g<1$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

47. Korzystając z **45** i **46** obliczyć granice: a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$; b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{b^n}$, $a,b>1$; c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$.

48. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym zbadać zbieżność ciągów:

a) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$; b) $b_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

c) $c_1 = a$, $0\leqslant a\leqslant \frac{1}{3}$ i $c_{n+1} = \dfrac{1}{4-3c_n}$; d) $d_1 = 1$, $d_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(d_n + \dfrac{\beta}{d_n}\right)$ gdzie $\beta\geqslant 0$.

49. Pokazać, że ciąg $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ jest malejący (Oszacować stosunek $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ korzystając z nierówności Bernoulliego). Następnie uzasadnić nierówności

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

50. Korzystając z obu nierówności w zad. **49** pokazać, że ciąg (γ_n), gdzie $\gamma_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ jest zbieżny.

51. Ciąg (x_n) jest monotoniczny i zawiera podciąg zbieżny do g. Czy ciąg (x_n) musi być zbieżny do g?