WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 5

52. Korzystając z twierdzenia Stolza obliczyć granice następujących ciągów:

a) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$; b) $a_n = \dfrac{\ln n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$; c) $a_n = \dfrac{\ln (n!)}{n \ln n}$.

53. Niech (a_n) będzie ciągiem takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = g$. Pokazać, że wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = g$.

54. Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach dodatnich, zbieżnym do g. Pokazać, że wtedy ciągi (A_n) i (G_n) średnich arytmetycznych i geometrycznych:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

są zbieżne do g.

55. Pokazać, że dla ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich zachodzi następująca implikacja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g.$$

56. Wyznaczyć granice podanych ciągów:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{1 + 2 + \ldots + n}}{n}$; b) $a_n = \dfrac{\sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}}{n\sqrt{n}}$; c) $a_n = n(\ln (n+2) - \ln n)$;

d) $a_n = \sqrt{n}(\ln (n+2) - \ln n)$; e) $a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2}$; f) $a_n = n^2(\ln (n+2) - \ln n)$;

g) $a_n = \left(\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^n$; h) $a_n = \left(\dfrac{n - 1}{n + 1}\right)^{n\sqrt{n}}$; i) $a_n = \left(\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^{2n}$;

j) $a_n = \dfrac{n}{e^{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}}$; k) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{e} - 1\right)$; l) $a_n = n\left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$;

57. Sprawdzić, czy istnieją granice ciągów:

a) $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$; b) $b_n = 2n^{(-1)^n} - n\,(1 + (-1)^n)$; c) $c_n = \dfrac{1 - \sin \frac{\pi n}{2}}{2 + \sin \frac{\pi n}{2}}$.

58. Pokazać, że jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej, to dla dowolnego ograniczonego ciągu (b_n) prawdziwe są równości:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$; b) $\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

59. Pokazać, że dla ograniczonych ciągów (a_n) i (b_n) prawdziwe są następujące nierówności:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Podać przykłady takich ciągów, dla których nierówności te są ostre.

60. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Pokazać, że:

(a) jeżeli $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(b) jeżeli $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

61. Wyznaczyć granicę górną i dolną ciągów:

a) $a_n = (-1)^n + \dfrac{\cos n\pi}{n}$; b) $b_n = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} + \dfrac{1}{n}$; c) $c_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$;

d) $d_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; e) $e_n = \dfrac{n}{2n+1} \cdot (-1)^n$; f) $f_n = \dfrac{n-2}{2n+1} \sin \dfrac{n\pi}{2}$.