WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 6

62. Niech (a_n) będzie ciągiem nieograniczonym. Pokazać, że istnieje podciąg (a_{n_k}) taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$ lub $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

63. Ciąg (a_n) jest zbieżny do a, $a \neq 0$. Ciąg (b_n) o wyrazach różnych od zera jest zbieżny do zera. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \infty$.

64. Funkcja f jest określona na odcinku $(0,1)$. Znaleźć dziedzinę funkcji:

a) $f(\sin x)$; b) $f(\ln x)$; c) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

65. Funkcja f jest określona i rosnąca na odcinku $[a,b]$. Pokazać, że na przedziale $[f(a), f(b)]$ istnieje funkcja odwrotna f^{-1}, która jest również rosnąca.

66. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 2x,\ \ x > 1$; b) $g(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$; c) $h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

67. Niech $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Znaleźć $f_2(x) = (f \circ f)(x)$, $f_3(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ i $f_n(x)$ (n-krotne złożenie).

68. Niech

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0 & \text{jeśli} \quad |x| > 1, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{jeśli} \quad |x| \leqslant 2; \\ 2 & \text{jeśli} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

Narysować wykresy funkcji:

a) $(\varphi \circ \varphi)(x)$; b) $(\psi \circ \varphi)(x)$; c) $(\varphi \circ \psi)(x)$; d) $(\psi \circ \psi)(x)$,

d) $\omega(x) = \varphi(x^2 + 1)$, d) $\mu(x) = |\varphi(|x| + 1) - 1|$.

69. Uzasadnić następujące równości:

a) $\cos^2 \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}$; b) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x, \quad x \neq 0$.

70. Sporządzić wykresy następujących funkcji: a) $y = \arcsin(\sin x)$; b) $y = \sin(\arcsin x)$.

71. Wykazać, że:

a) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$; b) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$.

72. Na podstawie definicji sprawdzić, że:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1$; c) $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4$.

73. Niech $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}; \\ -3x & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Czy istnieją granice $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

74. Funkcja $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ granicę równą 0. Czy funkcja ta musi być tożsamościowo równa 0?

75. Funkcja f jest monotoniczna i $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Czy istnieje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

76. Funkcja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 granicę równą 0. Funkcja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest ograniczona na przedziale $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, $\alpha > 0$. Pokazać, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

77. Dla funkcji $f : B \mapsto Y$ i funkcji $g : A \mapsto B$ wiadomo, że $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \beta$. Czy musi być $\lim\limits_{y\to b} f(y) = \beta$?